NÚMEROS COMBINATORIOS

Def:Dado un número entero no negativo n, se define el *factorial de n* (n!) como el producto $n! = n(n-1)...1$

Def: Dados dos números n,k enteros no negativos tales que $n \geq k$, se define el *número combinatorio n sobre k*, y se escribe $\binom{n}{k}$, como el cociente $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Propiedades de los números combinatorios:

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}$

Binomio de Newton

Dado n número positivo se tiene que:

$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + ... + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + ... \binom{n}{n}y^n$

Dando valores x=y=1, se obtiene la igualdad

$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... \binom{n}{n}$

VARIACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

1. **Varaciones sin repetición**

Dado un conjunto de n elementos se denomina *variaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k* (V_n^k) como el número de subconjuntos que se pueden formar con k elementos distintos del conjunto. Considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento distinto o lo tienen en distinto orden.

Ejemplo: formas de repartir las medallas de oro, plata y bronce entre 8 participantes.

Forma de calcularlo

$V_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$

Esta fórmula es fácil de deducir queremos formar sucesiones ordenadas de k elementos distintos de los n originales, para el elegir el primer puesto de la sucesión tenemos n opciones (cada uno de los elementos), una vez fijado el primero tenemos n-1 opciones (todos los elementos menos el elegido antes). Una vez hemos fijado todos menos uno nos quedan n-(k-1) opciones.

2 **Variaciones con repetición**

Dado un conjunto de n elementos se denomina *variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k* (VR_n^k) como el número de subconjuntos que se pueden formar con k elementos distintos o no del conjunto. Considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento distinto o lo tienen en distinto orden.

Ejemplo: Número de resultados posibles de una quiniela de fútbol.

Forma de calcularlo

$VR_n^k = n^k$

Esta fórmula se deduce de la siguiente manera: queremos formar sucesiones ordenadas de k elementos distintos o no de los n originales, así cada vez que elegimos un puesto cualquiera de la sucesión tenemos n opciones, ya que están a nuestra disposición todos los elementos del conjunto original.

3 **Permutaciones sin repetición**

Dado un conjunto de n elementos se denomina *permutaciones sin repetición de n elementos* (P_n) como el número de subconjuntos que se pueden formar con los n elementos del conjunto sin que haya ninguno repetido. Considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento en distinto orden.

Ejemplo: Formas de ordenar 10 libros en una estanteria.

Forma de calcularlo

$P_n = n!$

Esta fórmula es inmediata si nos fijamos en que $V_n^n = P_n$

4 **Permutaciones con repetición**

Dado un conjunto de r elementos se denomina *permutaciones con repetición de r elementos en el que el elemento i-ésimo está repetido k_i veces* (P_n) como el número de subconjuntos que se pueden formar con los n elementos del conjunto ($k_1 + ... k_r = n$) apareciendo el elemento i-ésimo k_i veces . Considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento en distinto orden.

Ejemplo: Formas de colocar 5 pelotas de las cuales 2 son amarillas y 3 azules.

Forma de calcularlo

$P_n^{k_1,\ldots,k_r} = \dfrac{n!}{k_1!\ldots k_n!}$

Para hallar la fórmula, se hacen las permutaciones del total de elementos n y se divide por el número de permutaciones iguales al contar los k_i elementos i como distintos.

5 Combinaciones sin repetición

Dado un conjunto de n elementos se denomina *combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k* (C_n^k) como el número de subconjuntos que se pueden formar con k elementos distintos del conjunto. Considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento distinto, sin importar el orden en que se encuentren.

Ejemplo: Formas de elegir el quinteto inicial de un equipo de basket.

Forma de calcularlo

$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{P_k}$

La fórmula se obtiene al considerar el número de variaciones (subconjuntos considerando el orden) y dividirlo por las posibles ordenaciones de cada subconjunto (ya que ahora no se tiene en cuenta el orden)

6 Combinaciones con repetición

Dado un conjunto de n elementos se denomina *combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k* (CR_n^k) como el número de subconjuntos que se pueden formar con k elementos distintos o no del conjunto. Considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento distinto, sin importar el orden en que se encuentren.

Ejemplo: Se tienen pelotas de futbol y baloncesto, formas de elegir 5 pelotas.

Forma de calcularlo

$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

PRINCIPIO DEL PALOMAR

Este teorema surge originariamente de la observación de que si posees un numero de palomas superior al numero de nidos en los que deben ser colocadas, en un nido tendrá que haber al menos 2 palomas.

De manera más general este principio se puede enunciar diciendo que si tienes n elementos que quieres repartir en m grupos, tendremos:

$$n=cm+r$$

Siendo c el cociente de la división y r el resto (r distinto de cero), entonces se puede concluir que en uno de los grupos habrá al menos c+1 elementos.

Ejemplo: La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demostrar que podrías haber elegido al menos a 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuese menor que 51 años. (Fase local 2004)

Solución: Podemos aplicar el principio del palomar de la siguiente manera.

Dividimos a los 120 estudiantes en 40 grupos de 3 personas, si dividimos la suma de las edades por los 40 grupos obtenemos:

2002=40 x 50 + 2

Por el principio del palomar habrá al menos un grupo cuya suma de las edades de sus tres miembros sea c+1, como en este caso c=50, habrá un grupo tal que la suma de las edades de sus miembros sea al menos 51, con lo que se prueba lo que se pedía (existe un grupo tal que la suma de las edades de sus miembros no es menor que 51).

TEORÍA DE NÚMEROS

1. Congruencias

   Se dice que dos números a,b son congruentes módulo m ($a \equiv b (mod\ m)$)si ambos tienen el mismo resto al dividirlos por m.

   Se cumple que $a \equiv b(mod\ m) \Longleftrightarrow m | a-b$

   Además, las congruencias pueden sumarse, restarse o multiplicarse, es decir se cumple que si $a \equiv b(mod\ m)$ y $c \equiv d(mod\ m)$:

   $a \pm c \equiv b \pm d(mod\ m)$
   $ac \equiv bd(mod\ m)$

   Así, se cumple que:

   $a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow a^k \equiv b^k(mod\ m)$
   $a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow f(a) \equiv f(b)(mod\ m)$

   donde $f(x)=a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ con $a_i$números enteros.

   En general, esto no se cumple para la división, pero si se cumple lo siguiente:

   $mcd(c,m)=1$, $ca \equiv cb(mod\ m) \Rightarrow a \equiv b(mod\ m)$

2. Pequeño teorema de Fermat

   Sea a un entero positivo y p un número primo. Entonces:

   $a^p \equiv a(mod\ p)$

   Por el resultado visto en el apartado anterior sabemos que si mcd (a,p)=1, entonces

   $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$