Preparación olímpica III: geometría

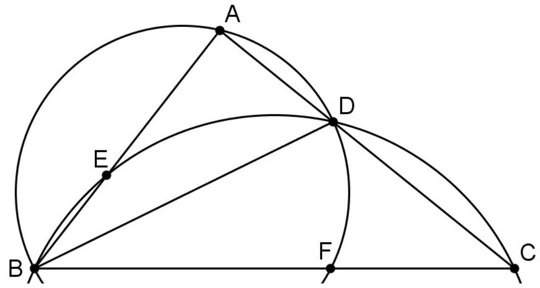
Problemas

Adrián Rodrigo Escudero

20 de noviembre de 2015

Problema 1 (San Petersburgo 1996)

Sea BD la bisectriz del ángulo B en el triángulo ABC. La circunferencia circunscrita del triángulo BDC corta a AB en E, y la del ABD corta a BC en F. Demostrar que AE = CF.

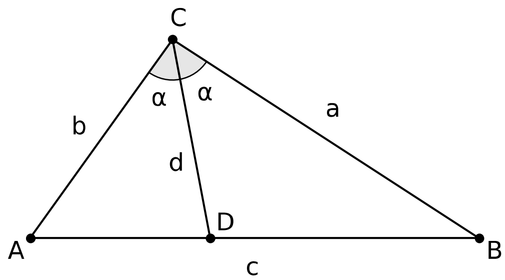


Ayuda: utiliza potencia y el teorema del seno.

Problema 2 (fase local OME 2003)

Dado un triángulo de vértices A, B y C, y con lados de longitud a = BC, b = AC y c = AB, llamemos D al punto de intersección del lado AB con la bisectriz del ángulo C. Demuestra que:

$$2ab\cos(C/2)=CD(a+b)$$



Ayuda: calcula el área del triángulo.

Problema 3

Sea S la superficie de un triángulo de lados a, b y c. Probar que:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S$$

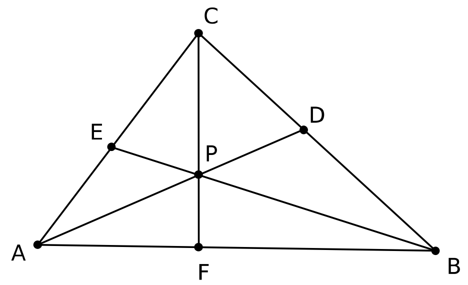
¿Cuándo se da la igualdad?

Ayuda: intenta quedarte con el mínimo de variables, escribiendo unas en función de las demás; ten también en cuenta la desigualdad de las medias (que se cumple si y solo si a = b):

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$$

Problema 4 (teorema de Ceva)

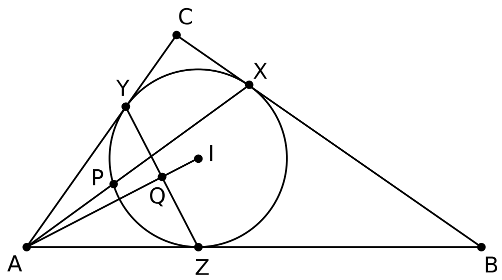
Dado un triángulo ABC y tres cevianas (rectas que pasan por un vértice y cortan al lado opuesto, y son distintas de los lados) tales que una pasa por el vértice A y corta al lado opuesto en D, otra pasa por el vértice B y corta al lado opuesto en E, y la última pasa por el vértice C y corta al lado opuesto en F. Demostrar que si las tres cevianas concurren en un punto, entonces AF · BD · CE = FB · DC · EA.



Ayuda: Aplica seis veces el teorema del seno.

Problema 5 (olimpíada iberoamericana de matemática 1990)

En un triángulo ABC, sea I el incentro y sean X, Y y Z los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA y AB respectivamente. La recta AX corta al incírculo nuevamente en P, y la recta AI corta a YZ en Q. Demostrar que X, I, Q y P están sobre una misma circunferencia.



Problema 6 (Inglaterra 1996)

Sea ABC un triángulo acutángulo y O su circuncentro. Sea S la circunferencia que pasa por A, B y O. Las rectas CA y CB cortan a S otra vez en P y Q. Demostrar que CO es perpendicular a PQ.