Taller de Talentos Matemáticos
Zaragoza, 8 abril 2016
Josep Rochera Gaya

PROBLEMAS GEOMETRICOS

Probabilidad

1. Se selecciona al azar un punto P del interior del pentágono de vértices A(0,2), B(4,0), C(2π+1,0), D(2π+1,4) y E(0,4). ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo $\angle$APB sea obtuso?
2. A, B son dos puntos de una circunferencia C de radio r, tales que la cuerda AB vale r . Se elige al azar un punto P del círculo, hallar la probabilidad de que el triángulo ABP sea acutángulo si:
   (a) P está en la circunferencia.
   (b) P es un punto del interior del círculo.
3. En Holecity, debido al tráfico, los autobuses no consiguen cumplir los horarios establecidos aunque logran mantener sus frecuencias de paso. En una parada de autobús paran los autobuses de las líneas A y B con frecuencias respectivas de 8 y 12 minutos. Si llegamos a la parada en un momento cualquiera, calcular la probabilidad de que:
   (a) Pase un autobús (A o B) antes de 2 minutos.
   (b) El primer autobús que pase sea de la línea A.
4. En el segmento AB, E es el punto medio. Se eligen, al azar, un punto C del segmento AE, y otro D de EB. ¿Cuál es la probabilidad de que CD sea menor que la cuarta parte de AB?
5. Una barra se rompe al azar en dos puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que con las tres partes resultantes se pueda formar un triángulo?

Sangakus

6. ABCD es un romboide, E el punto medio del lado AB, y P el punto intersección de BD con CE. Hallar el área de las regiones que determinan dichos segmentos en el paralelogramo.
7. En el rectángulo ABCD se trazan los segmentos que unen cada vértice con los puntos medios de los lados opuestos. Calcular el área del octógono que determinan.
8. En el cubo ABCDA'B'C'D' se consideran las diagonales de dos caras contiguas BD y CB'. Hallar dos puntos de estas diagonales que determinen un vector paralelo a la diagonal AC' del cubo.
9. En el cubo ABCDA'B'C'D' se considera el plano BA'D. Calcular el radio de la esfera inscrita al cubo y a este plano en la esquina del vértice A.
10. En el cuadrado ABCD de lado a, se traza el triángulo equilátero ABE, y CE se prolonga hasta encontrar AD en F. Probar que se puede encontrar un punto G en AB tal que CFG sea equilátero. Sea H el punto intersección de AE con FG, e I de BE con CG, probar que el radio r del círculo inscrito a AHG es el doble de r', radio del círculo inscrito a BCI.

Varia

11. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide a y su altura h. Se inscribe un cubo, apoyado sobre la base de la pirámide, y tal que cuatro de las aristas del cubo son paralelas a una diagonal de la base de la pirámide. Calcular la arista del cubo en función de a y h.
12. En el triángulo ABC, M es el punto medio de BC. Si AB=1, AC=2 y AM=BC, calcular x=BM.
13. En un cuadrilátero arbitrario ABCD se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices A y C con B y D son concíclicos.
14. Dada una circunferencia $\mathscr{C}$ y un punto A exterior a ella, demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de A y un punto P genérico de $\mathscr{C}$ es otra circunferencia.
15. Demostrar que si las coordenadas de los vértices de un polígono son racionales, su área es racional.
16. Sea AC la diagonal mayor del paralelogramo ABCD. Desde C se trazan las perpendiculares a AB y AD. Sean E y F los pies de estas perpendiculares. Demostrar que: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}^2$.
17. En un billar perfectamente circular, de radio R, se halla situada en el punto A una bola a una distancia x del centro. Se lanza sobre un punto del borde y, tras rebotar dos veces, vuelve a A. ¿Sobre qué punto se ha lanzado?
18. Dado un cono recto de generatriz a y diámetro de la base b, determinar un plano paralelo a la generatriz de modo que el segmento parabólico que resulta en la sección tenga área máxima.