TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO 23 de octubre de 2015

ESTHER GARCÍA (IES RÍO GÁLLEGO)

PROBLEMAS DE OPOSICIÓN DEL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA PROPUESTOS EN TRIBUNALES DE MADRID EN 2002, 2008 y 2010

Problema 1. Sean p, q, r tres números naturales tales que la suma $p^3 + q^3 + r^3$ es múltiplo de 9. Demostrar que al menos uno de los tres números p, q, r es múltiplo de 3. (Madrid 2002)

Problema 2. Se tienen tres bolsas conteniendo n bolas numeradas 1, 2, 3, …, n. Se extrae al azar una bola de cada bolsa y sean x, y, z los números de las bolas extraídas. Halle la probabilidad de que x+y=z. (Madrid 2010)

Este problema también ha sido propuesto en Murcia 2006.

Problema 3. A) Dado un triángulo ABC de ángulos agudos, hállese un punto P tal que la suma de sus distancias a los vértices A, B y C sea la menor posible.

B) Sobre los lados del triángulo ABC se forman triángulos equiláteros BCA’, CAB’ y ABC’ construidos hacia fuera del mismo. Demuestre que los segmentos rectilíneos AA’, BB’ y CC’ son iguales, que concurren en un mismo punto y que forman entre sí ángulos de 60º.

(Madrid 2010)

Problema 4. Con dados de 1cm de arista se construye un cubo sólido de 4cm de arista y se pinta de negro toda la superficie del cubo así construido. Se deshace el cubo y, cogiendo los dados al azar sin mirarlos, se construye de nuevo. Calcule la probabilidad de que en el nuevo cubo figure, al menos, en una cara un dado con una cara visible de color blanco.

(Madrid 2008)

Este problema con 27 cubitos en vez de 64 ha sido propuesto dos veces en Madrid 1982 y 1996 así como en Valencia 1979.

Soluciones tomadas de la página web de ACADEMIA DEIMOS
http://www.academiadeimos.es/?page_id=444

Problema 1. Sean p, q, r tres números naturales tales que la suma $p^3+q^3+r^3$ es múltiplo de 9. Demostrar que al menos uno de los tres números p, q, r es múltiplo de 3.

Solución:
Por reducción al absurdo supongamos que ninguno es múltiplo de 3, ni p, ni q, ni r. Luego $p=3n_1+r_1$, $q=3n_2+r_2$ y $r=3n_3+r_3$, con $n_i \in N$ y $r_i \in \{1,2\}$, $i=1,2,3$.
Elevando al cubo $p^3=9m_1+r_1^3$, $q^3=9m_2+r_2^3$, $r^3=9m_3+r_3^3$, con $m_i \in N$.
Sumando $p^3+q^3+r^3=9(m_1+m_2+m_3)+(r_1^3+r_2^3+r_3^3)$, luego ha de ser $r_1^3+r_2^3+r_3^3$ múltiplo de 9. Pero cada r_i^3 es 1 u 8, por lo que $r_1^3+r_2^3+r_3^3$ toma uno de los valores siguientes: 3, 10, 17, 24 y ninguno de ellos es múltiplo de 9, lo que contradice la hipótesis de que $r_1^3+r_2^3+r_3^3$ era múltiplo de 9. Luego al menos uno de los tres números, p, q y r es múltiplo de 3.

Problema 2. Se tienen tres bolsas conteniendo n bolas numeradas 1, 2, 3, …, n. Se extrae al azar una bola de cada bolsa y sean x, y, z los números de las bolas extraídas. Halle la probabilidad de que x+y=z.

Solución:
El espacio muestral asociado a este experimento es el conjunto Ω de ternas ordenadas (x, y, z) tales que $x,y,z \in \{1,2,\dots,n\}$, de modo que el número de casos posibles del experimento es n^3.
Para determinar el número de casos favorables a que sea x+y=z, considérese que, por lo pronto, debe ser $z \in \{2,\dots,n\}$ y que, para cada uno de estos valores z, el par (x,y) sólo puede ser alguno de los z-1 pares (1,z-1), (2, z-2), …, (z-1,1). Siendo así, el número total de casos favorables es: $\sum_{z=2}^{n}(z-1)=1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

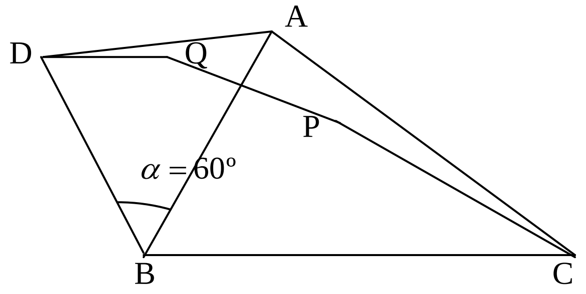
La probabilidad que se pide es entonces: $p[x+y=z]=\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^3}=\frac{n-1}{2n^2}$

Problema 3. A) Dado un triángulo ABC de ángulos agudos, hállese un punto P tal que la suma de sus distancias a los vértices A, B y C sea la menor posible.

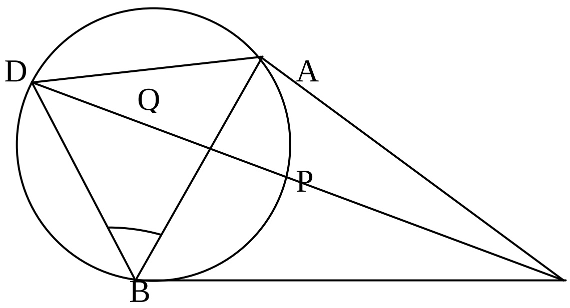
Solución:

A) Denotemos por g el giro de centro B y ángulo 60º, y sea D=g(A), como se indica en la figura. Obsérvese que el triángulo ABD es equilátero, pues BA=BD y el ángulo en el vértice B mide 60º. Ahora, para cualquier punto P denotamos Q=g(P), con lo que también el triángulo PBQ es equilátero, pues BP=BQ y el ángulo en el vértice B mide 60º.

Como los giros preservan la distancia, PA=QD, lo que junto con lo anterior nos dice que la suma de distancias de P a los vértices A, B y C vale d(P)=PA+PB+PC=DQ+QP+PC que es la longitud de línea quebrada de la figura. En consecuencia, el punto P para el que esta cantidad es mínima es aquél para el que esta línea quebrada es una recta. Por tanto, habrá que tomar P sobre la recta r_C que une C y D.



Veamos qué más condiciones ha de cumplir el punto P, para lo que analizamos la siguiente figura, en la que P ya está situado sobre la recta r_C. La clave radica en observar que puesto que los giros preservan ángulos y el triángulo PBQ es equilátero, se tiene $\angle APB = \angle DQB = 180º - \angle PQB = 120º$. Como $\angle ADB = 60º$, por ser el triángulo ABD equilátero, resulta que $\angle APB + \angle ADB = 120º + 60º = 180º$ luego los ángulos con los que se ve el segmento AB desde D y P son suplementarios. Esto supone que P pertenece a la circunferencia Γ que pasa por A, B y D. Esta circunferencia corta a la recta r_C que une C con D en los puntos D y P, luego $P = \Gamma \cap \left(r_C - \{D\}\right)$ es el punto buscado.

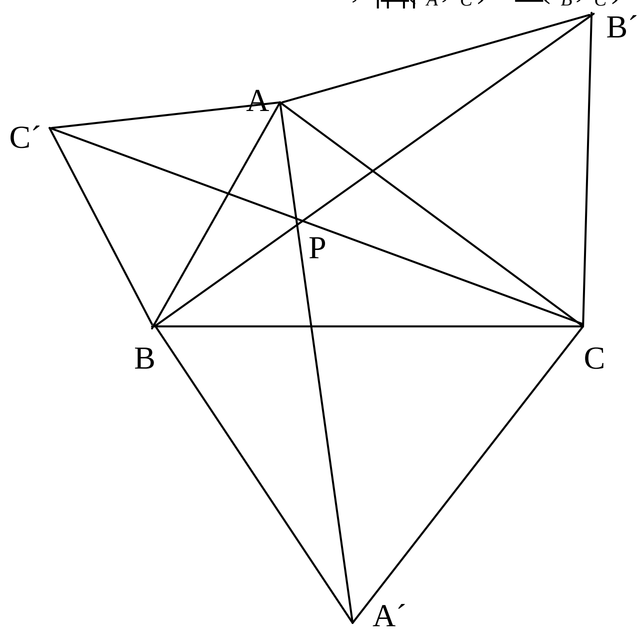


B) Sobre los lados del triángulo ABC se forman triángulos equiláteros BCA', CAB' y ABC' construidos hacia fuera del mismo. Demuestre que los segmentos rectilíneos AA', BB' y CC' son iguales, que concurren en un mismo punto y que forman entre sí ángulos de 60º.

Solución:

B) En la construcción anterior, denotamos D=C´. Hemos probado que el punto P que minimiza la suma de distancias a los vértices A, B y C pertenece a la recta r_C que une C con C´. Más aún, se ha demostrado que dicha suma de distancias vale d(P)=CC´. Como los roles de los vértices del triángulo de partida son intercambiables deducimos que, con las notaciones de este apartado, el punto P también pertenece a las rectas r_A y r_B que unen A con A´y B con B´.

Esto proporciona una construcción alternativa del punto P, pues $P = r_A \cap r_C$, y en particular prueba que los segmentos AA´, BB´ y CC´ son concurrentes. Además demuestra una de las igualdades pedidas en este apartado ya que, por simetría, AA´=BB´=CC´=d(P). Por último, recordemos que en A) se probó que $\angle APB = 120º$, luego $\angle(r_A, r_B) = \angle BPA' = 60º$. Por la misma razón, $\angle(r_A, r_C) = \angle(r_B, r_C) = 60º$, como queríamos probar.



Problema 4. Con dados de 1cm de arista se construye un cubo sólido de 4cm de arista y se pinta de negro toda la superficie del cubo así construido. Se deshace el cubo y, cogiendo los dados al azar sin mirarlos, se construye de nuevo. Calcule la probabilidad de que en el nuevo cubo figure, al menos, en una cara un dado con una cara visible de color blanco.

Solución:

Sea B el suceso "todas las caras del nuevo cubo son negras", de modo que la probabilidad a calcular es la del suceso contrario.

Una vez pintado el cubo original y desmontado, tendremos 8 dados con cero caras negras, 24 con una cara pintada de negro, 24 con dos y 8 con tres.

Se monta el nuevo cubo en el siguiente orden:

Se seleccionan primero los 8 dados interiores del cubo, los de cero caras negras; la probabilidad de seleccionarlos correctamente es $1 \Big/ \binom{64}{8}$.

Una vez seleccionados hay que colocarlos correctamente. La probabilidad de colocar correctamente estos cubos es evidentemente 1.

Se seleccionan ahora los 24 dados del centro de las caras exteriores del cubo, con una cara sólo pintada de negro. La probabilidad de elegirlos correctamente es $1 \Big/ \binom{56}{24}$. Para colocarlos correctamente basta que la cara pintada de negro sea la única visible, así que la probabilidad de colocar correctamente éstos es 1/6.

Se eligen después los otros 24 dados que formarán la parte central de las aristas del cubo, con dos caras negras. La probabilidad de elegirlos correctamente es $1 \Big/ \binom{32}{24}$.

Para colocarlos correctamente hay que hacer que la arista común a las caras negras sea parte de una arista del cubo. Cómo el número de aristas de un cubo es 12, la probabilidad de colocarlos correctamente es 1/12.

Por último se eligen los 8 dados que determinan los vértices del cubo, con tres caras negras. La probabilidad de elegirlos ahora correctamente es 1 y para colocarlos de forma correcta hay que hacer que el vértice común a las caras negras coincida con uno del cubo, al tener un cubo 8 vértices la probabilidad será 1/8.

Luego la probabilidad del suceso B será $p(B) = \frac{1}{\binom{64}{8}} 1^8 \frac{1}{\binom{56}{24}} \left(\frac{1}{6}\right)^{24} \frac{1}{\binom{32}{24}} \left(\frac{1}{12}\right)^{24} \left(\frac{1}{8}\right)^{8} = \frac{8!24!8!24!}{64!} \left(\frac{1}{6}\right)^{24} \left(\frac{1}{12}\right)^{24} \left(\frac{1}{8}\right)^{8}$, y la probabilidad que pide el problema es $p(B^C) = 1 - \frac{8!24!8!24!}{64!} \left(\frac{1}{6}\right)^{24} \left(\frac{1}{12}\right)^{24} \left(\frac{1}{8}\right)^{8}$.