Preparación Olímpica IV
Problemas

Rubén Blasco García

11 de diciembre de 2015

Problema 1. En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas divididos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos a los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de altura entre los miembros de la nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm. (Fase Local OME 2013)

Problema 2. Sea $n > 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que siempre que formamos n parejas con dos bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.

1. Demuestra que hay 4 bolas con el mismo número.
2. Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es $n - 1$.

(Fase Local OME 2015)

Problema 3. Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma.

Hallar la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas. (Fase Local OME 2010)

Problema 4. Saber cual es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, ¿pero cuántos ceros preceden a esta última cifra? (Fase Local OME 2011)

Problema 5. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente.Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color. (Fase Local OME 2009)

Problema 6. En el sótano de un castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

Problema 7 En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza que independientemente de cuales sean los n segmentos elegidos y de como de haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color. (OME 2011)