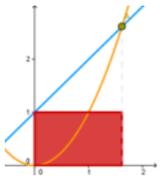


Proporciones notables en geometría

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria

Proporción

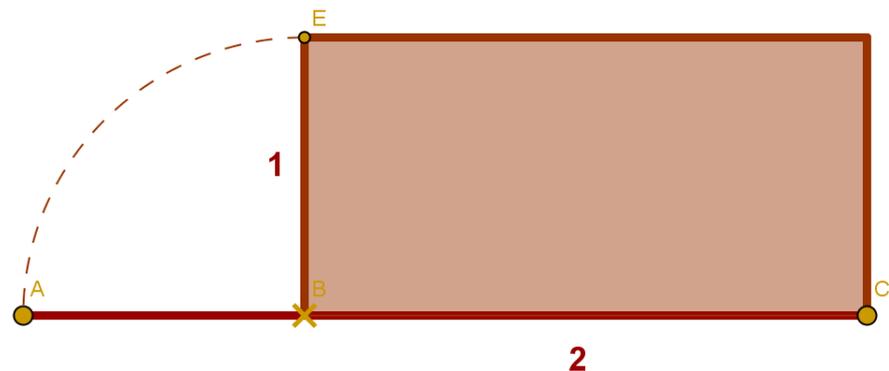
Proporciones notables
en geometría



En Geometría el elemento más sencillo al que se puede aplicar el concepto de proporción es el **segmento**, dividiéndolo en dos partes. La proporción que aparece es el resultado de dividir las longitudes de ambas.

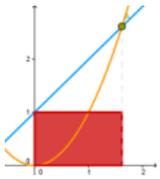


Si construimos un rectángulo en el que cada lado mida como cada una de las partes en que se divide el segmento, tendremos entonces un rectángulo con dicha proporción.



Proporción

Proporciones notables
en geometría



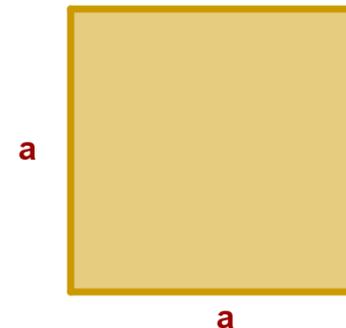
Dado un rectángulo de lados a y b , llamamos proporción (o módulo) del rectángulo al cociente entre el lado mayor y el lado menor.

$$p(a,b) = \frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}$$



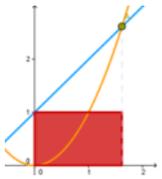
$$p(a,b) \geq 1$$

En el caso de ser 1, estamos ante el cuadrado



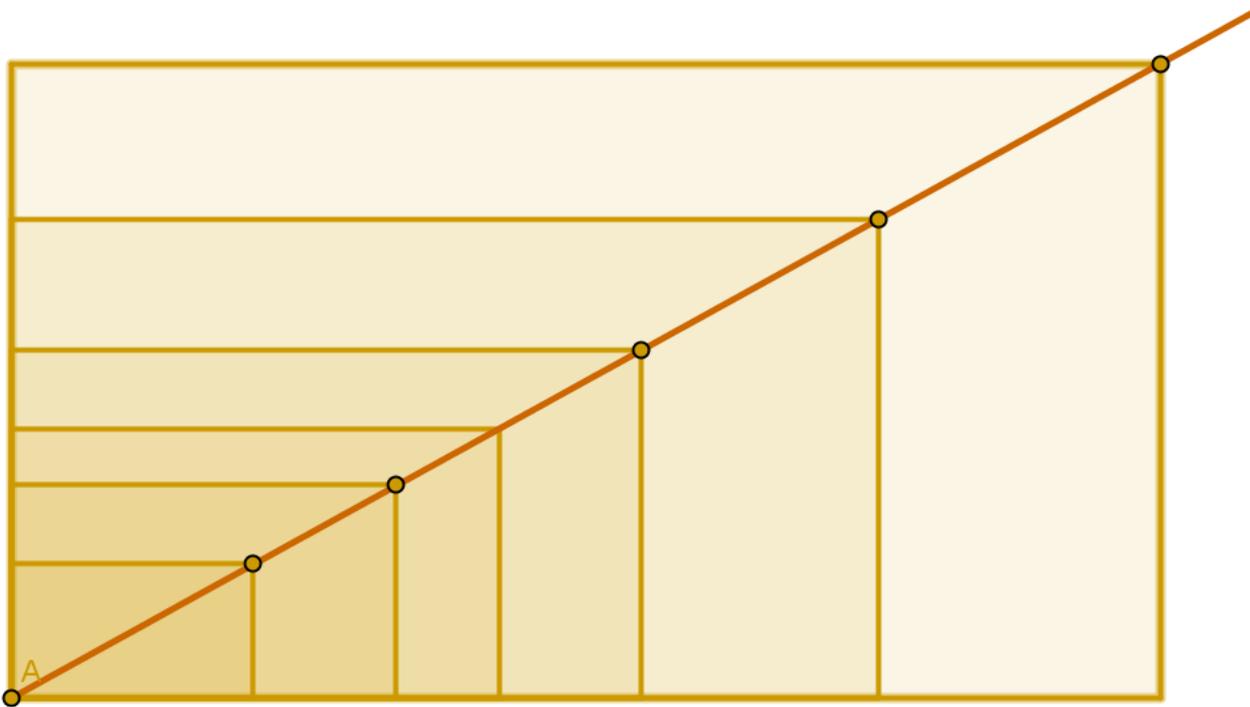
Proporción

Proporciones notables
en geometría



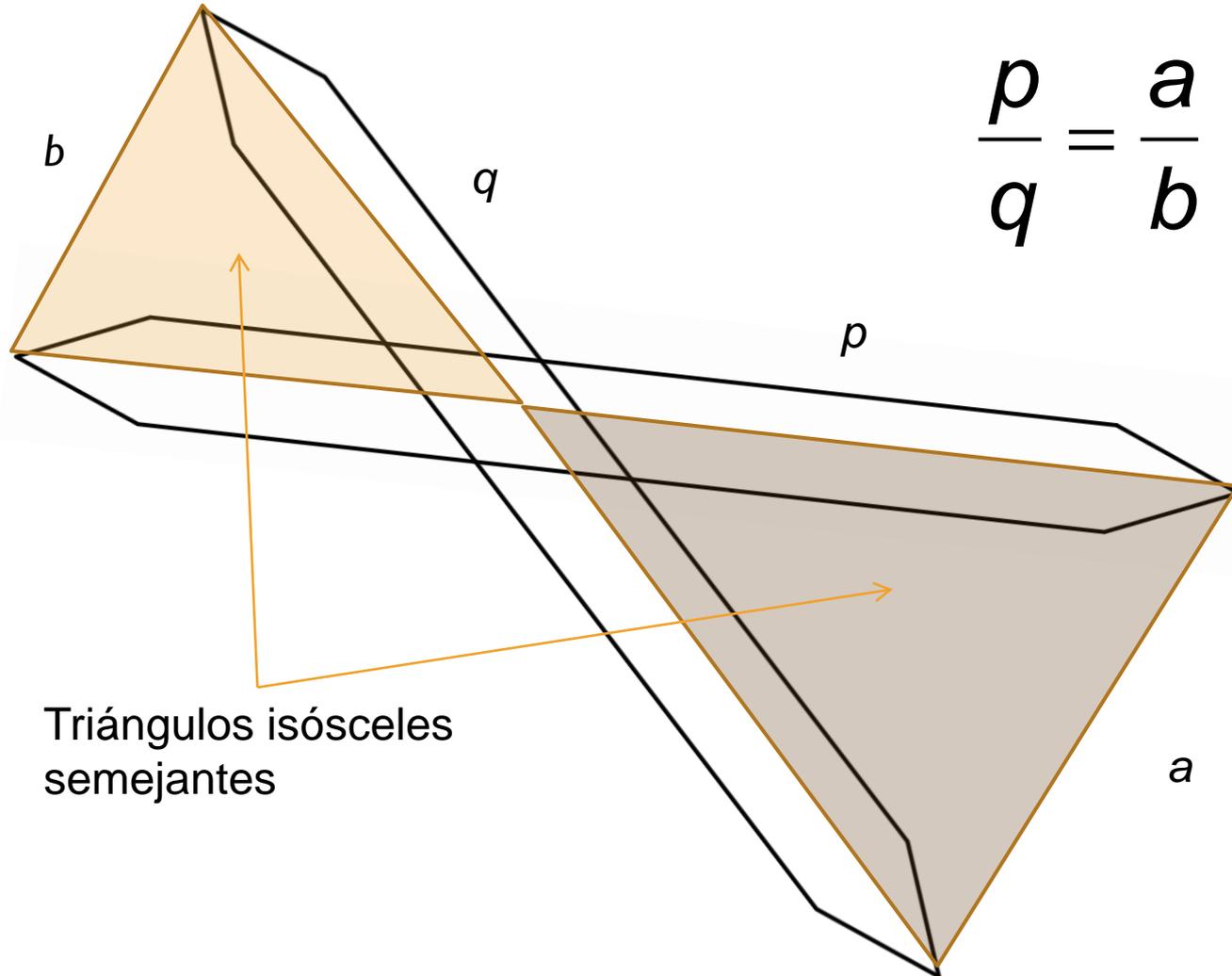
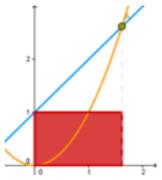
Además $p(ta, tb) = p(a, b) \quad \forall t > 0$

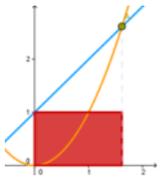
Es decir, la proporción se mantiene cuando los rectángulos son semejantes.



Compás de proporciones

Proporciones notables
en geometría

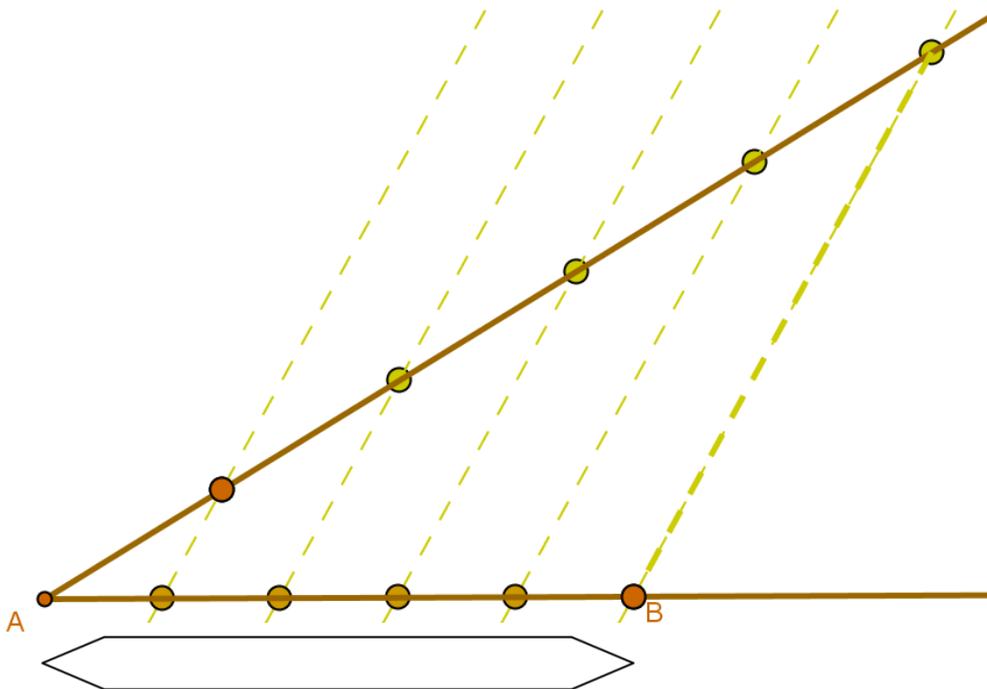




Tipos de proporciones

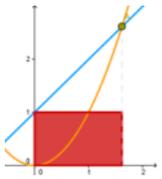
Hay dos tipos de proporción geométrica:

Proporción estática: La que establece entre dos elementos una razón simple, expresable como dos múltiplos de una unidad ó módulo: $3/2$, $5/3$, $5/4$



Tipos de proporciones

Proporciones notables
en geometría



Proporción dinámica: La que relaciona dos valores por una razón inconmensurable.

Algunos ejemplos son los siguientes:

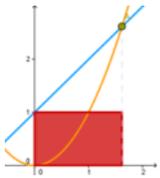
Proporción \sqrt{n}

Proporción cordobesa

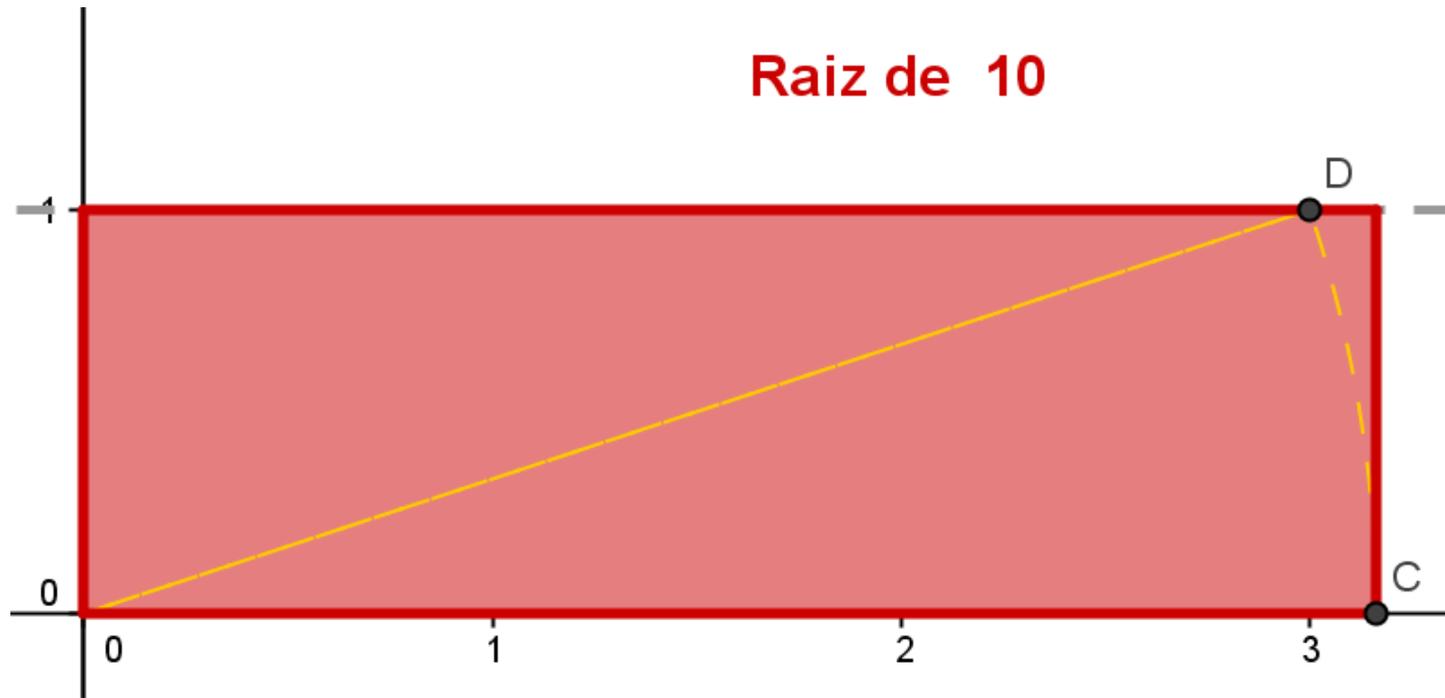
Proporciones *metálicas*

Proporción \sqrt{n}

Proporciones notables
en geometría

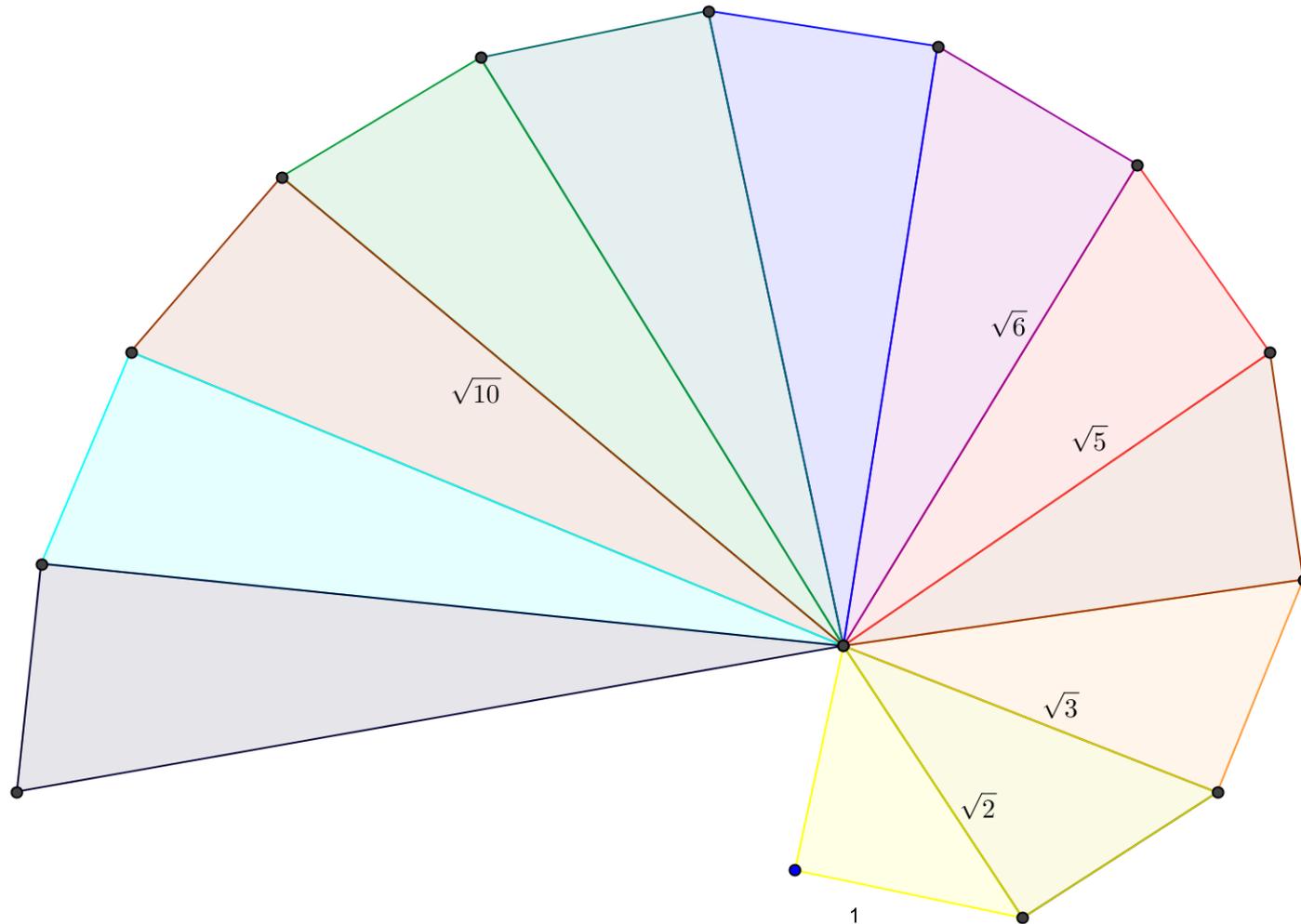
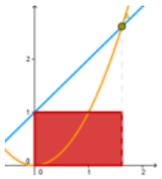


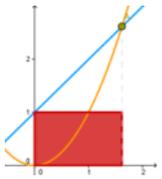
Son fáciles de construir con regla y compás utilizando como base matemática el teorema de Pitágoras



Proporción \sqrt{n}

Proporciones notables
en geometría

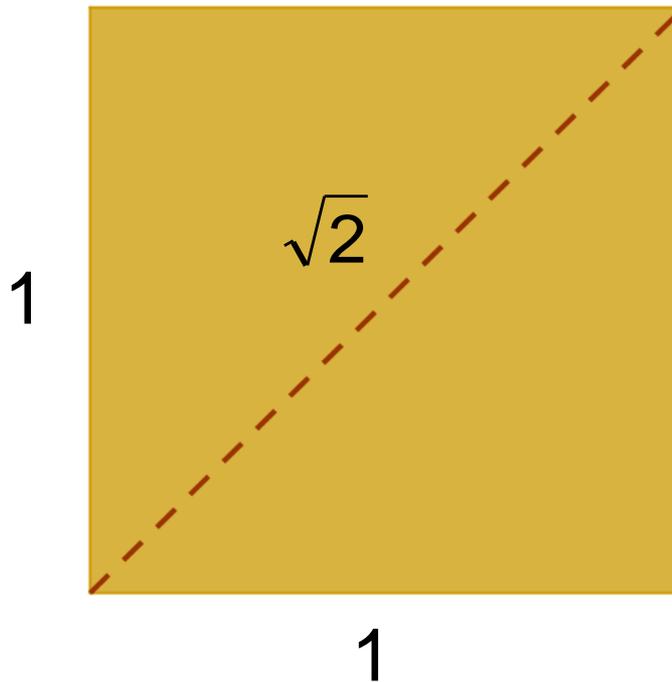


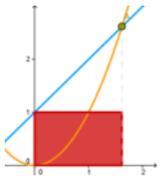


Proporción raíz de 2

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462\dots$$

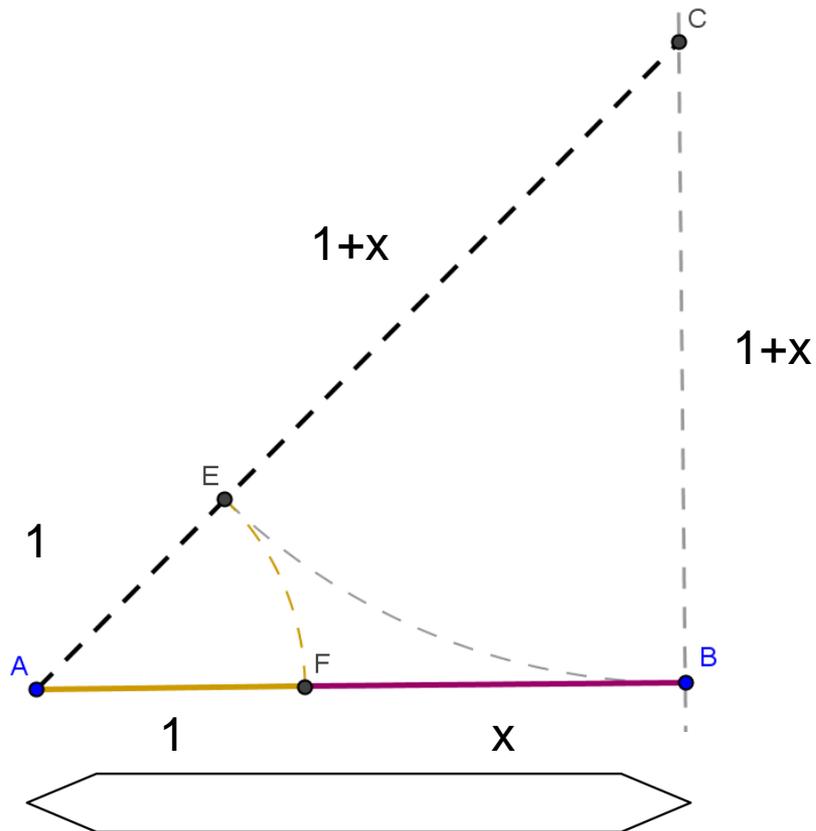
El caso más sencillo es el de raíz de 2, que representa la relación entre la diagonal de un cuadrado y el lado del mismo.





Proporción raíz de 2

¿Cómo dividir un segmento en estas proporciones?



- 1.- Trazar $BC=AB$, perpendicular
- 2.- Buscar el punto E, $EC=BC$
- 3.- Hallar F: $AE=AF$

$$(1+x)^2 + (1+x)^2 = (2+x)^2$$

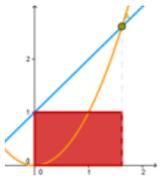
$$2 + 4x + 2x^2 = 4 + 4x + x^2$$

$$x^2 = 2$$

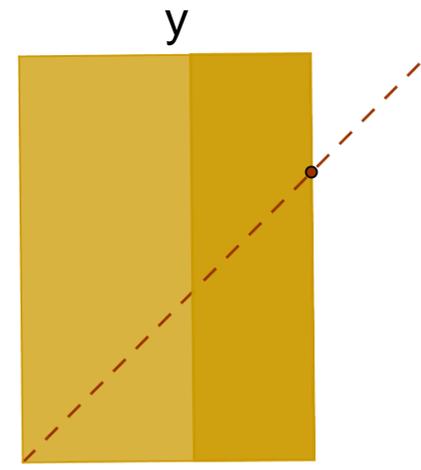
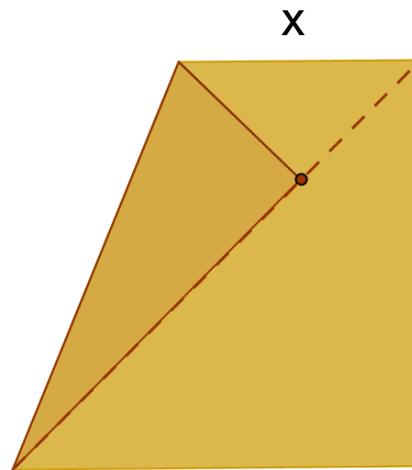
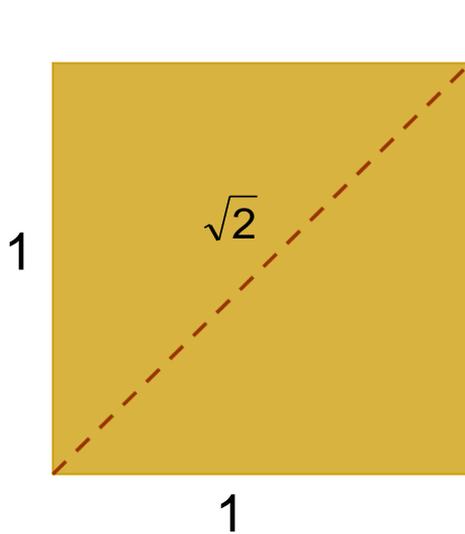
$$x = \sqrt{2}$$

Proporción raíz de 2

Proporciones notables
en geometría



¿Cómo construir un rectángulo de estas proporciones?



$$x = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

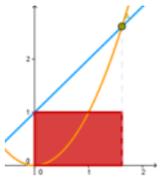
$$y = 1 - \frac{x}{2} = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La proporción es

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Proporción raíz de 2

Proporciones notables
en geometría

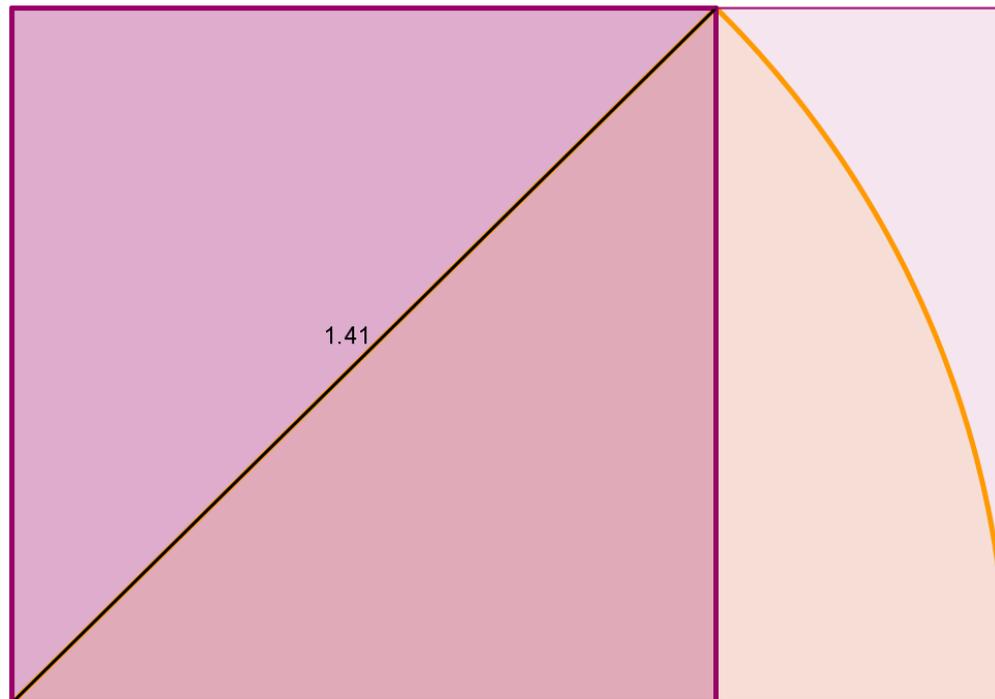


COMPROBACIÓN DE QUE UN RECTÁNGULO TIENE PROPORCIÓN $\sqrt{2}$

Dibujar el cuadrado más grande

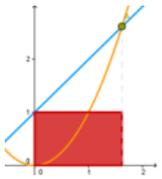
Trazar la diagonal

Llevar la diagonal sobre el lado

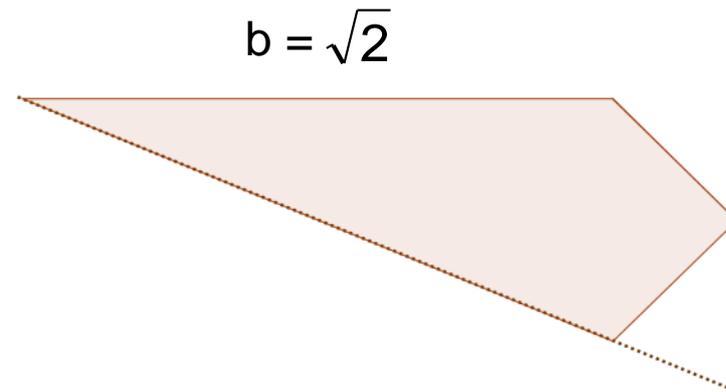
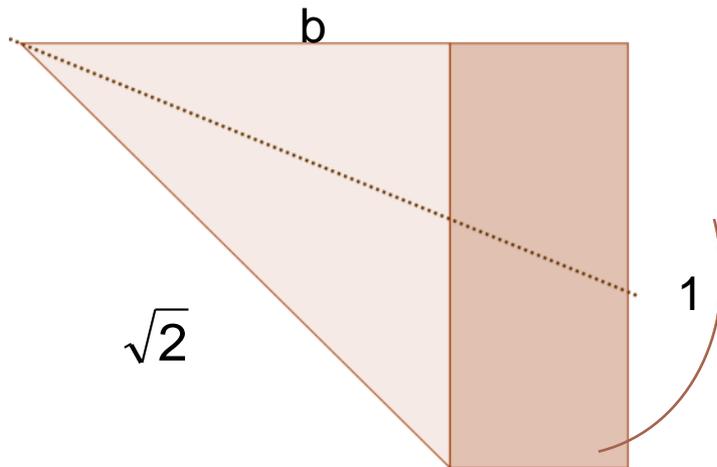


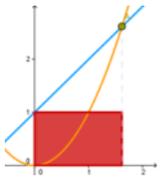
Proporción raíz de 2

Proporciones notables
en geometría



COMPROBACIÓN DE LA PROPORCIÓN DOBLANDO PAPEL



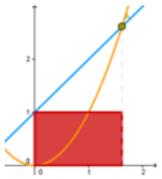


Proporción raíz de 2

Es importante a nivel práctico porque resuelve el problema de la duplicación manteniendo las proporciones. Si dividimos un cuadrado en dos rectángulos iguales, está claro que éstas ya no mantienen la forma cuadrada.

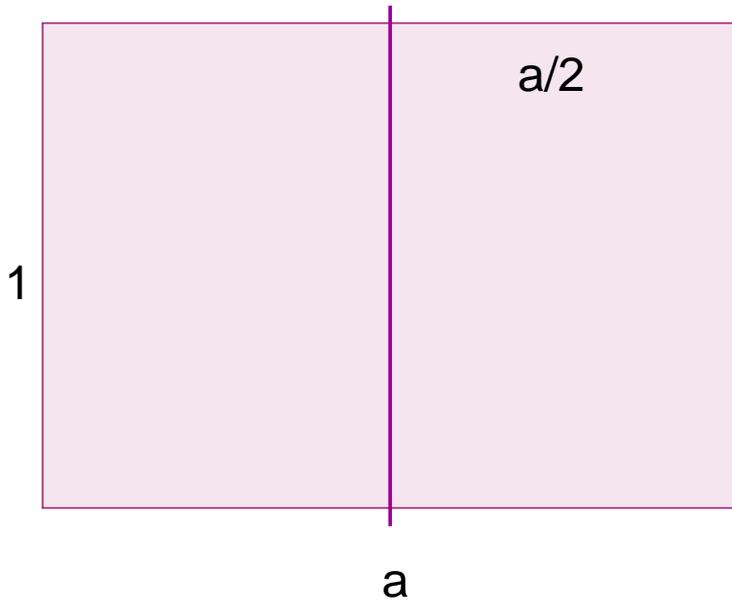
Esto sucede también en cualquier rectángulo estático.





Proporción raíz de 2

Sin embargo las dos mitades de un raíz de 2 tienen esta misma proporción.



$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a/2}$$

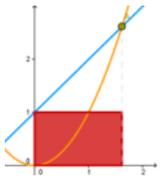
$$\frac{a^2}{2} = 1$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

Proporción raíz de 2

Proporciones notables
en geometría



La serie DIN-A ha normalizado los formatos de papel a partir de un rectángulo de un metro cuadrado de superficie con sus lados en proporción raíz de 2, que es el formato A0.

Dividiendo sucesivamente por la mitad ese rectángulo se van obteniendo los

formatos A1, A2, A3, A4...

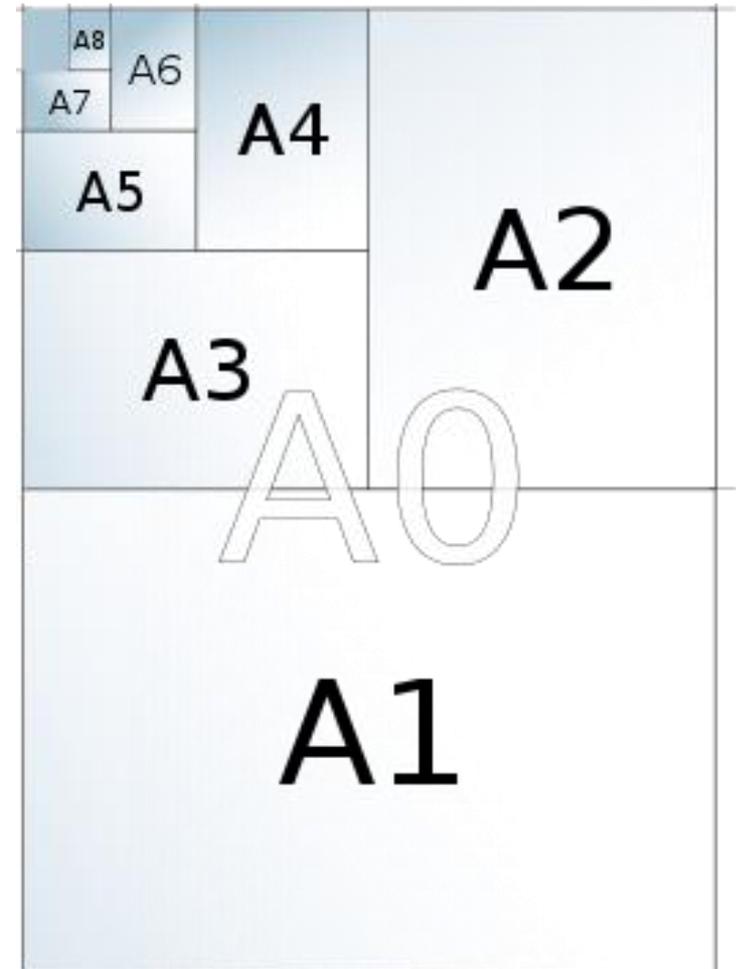
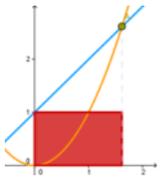


Imagen: Wikipedia



Proporción raíz de 2

Proporciones notables
en geometría



Para hallar las dimensiones hay que resolver:

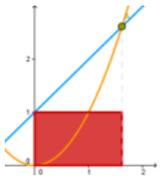
$$\begin{cases} a \cdot b = 1 \\ b = \sqrt{2}a \end{cases}$$

$$\sqrt{2}a^2 = 1$$

$$a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0,841 \text{ m}$$

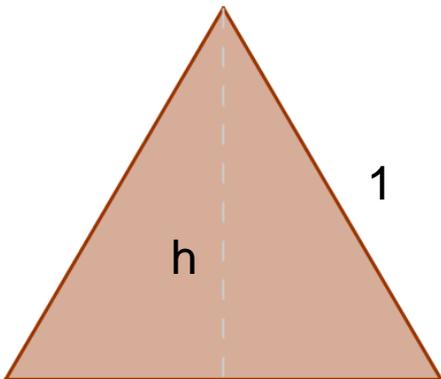
$$b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2} = 1,189 \text{ m}$$

Tamaño	ancho	largo
DIN A0	84,1	118,9
DIN A1	59,4	84,1
DIN A2	42,0	59,4
DIN A3	29,7	42,0
DIN A4	21,0	29,7
DIN A5	14,8	21,0
<i>Dimensiones en centímetros</i>		



Proporción raíz de 3

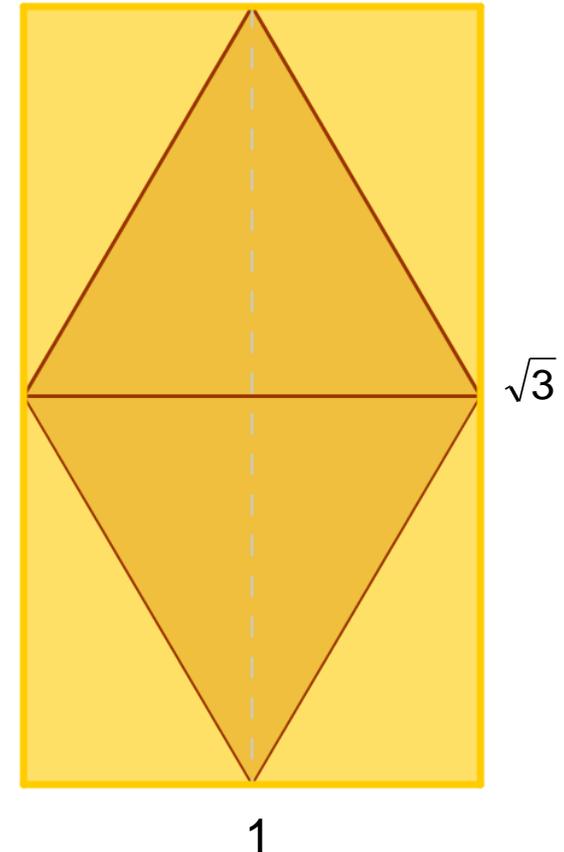
Partiendo de un triángulo equilátero



$$h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

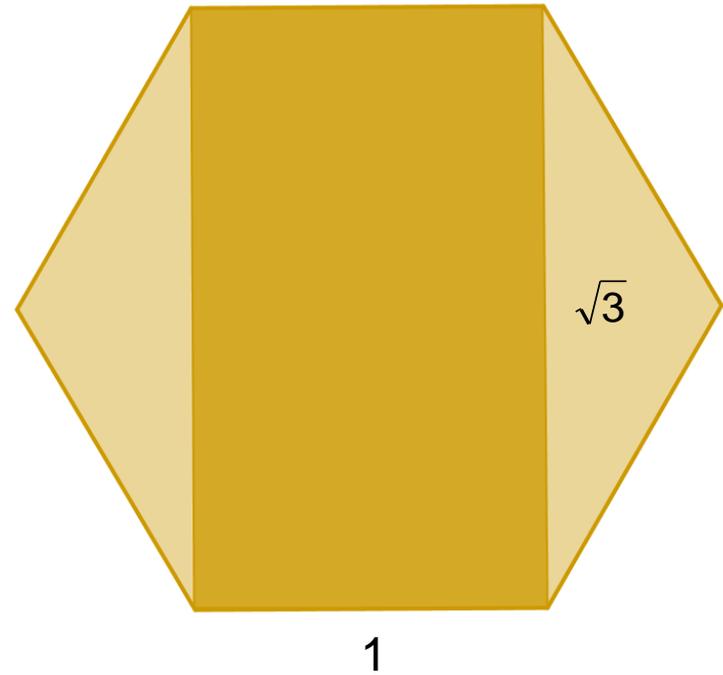
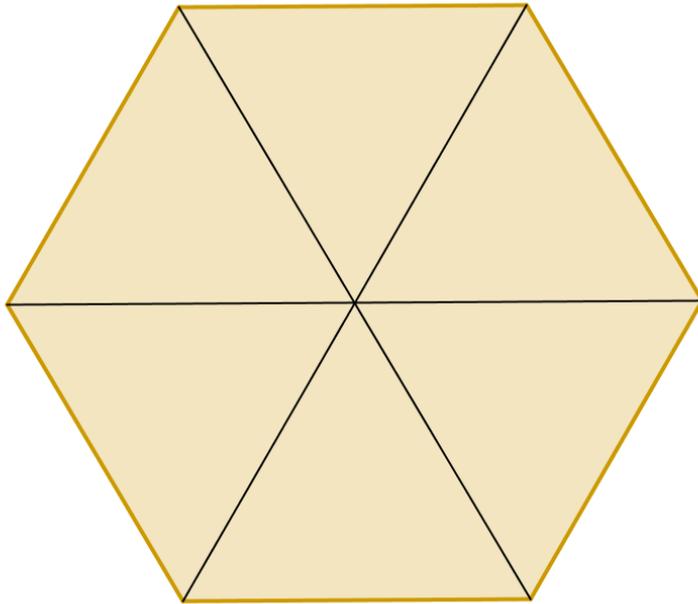
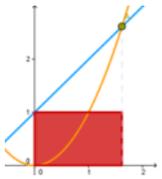
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1,7320508075...



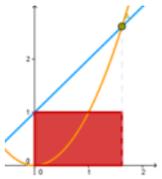
Proporción raíz de 3

Proporciones notables
en geometría

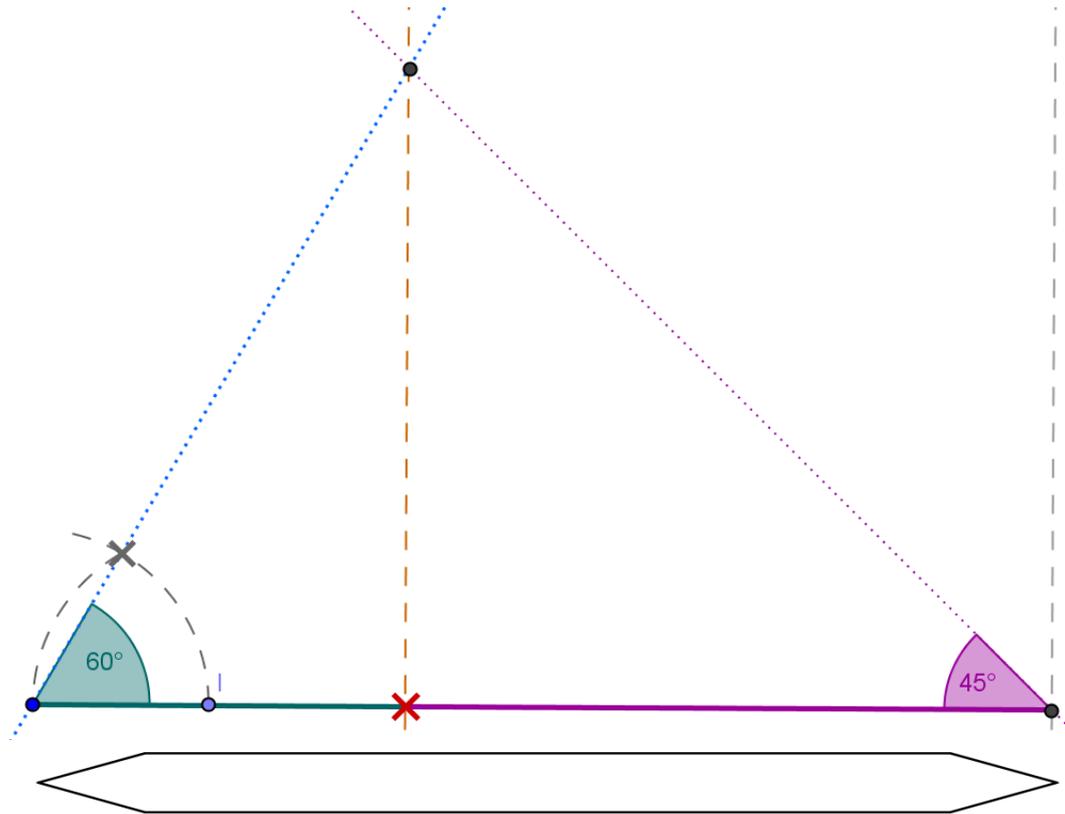


Proporción raíz de 3

Proporciones notables
en geometría

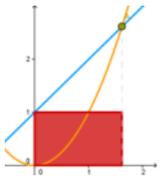


¿Cómo dividir un segmento en estas proporciones?

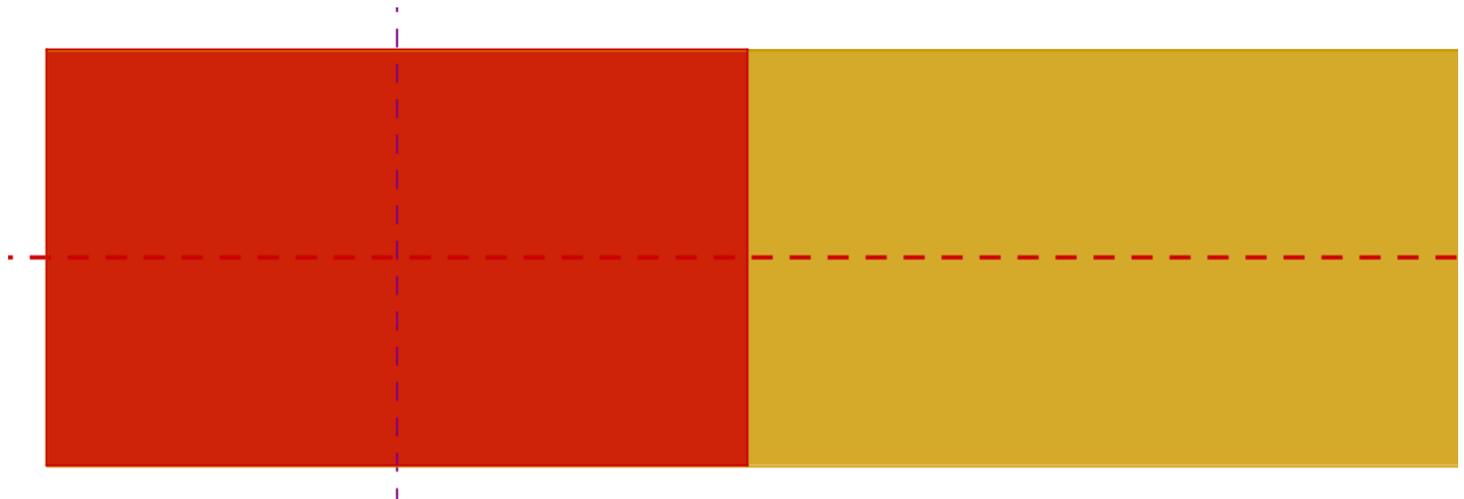
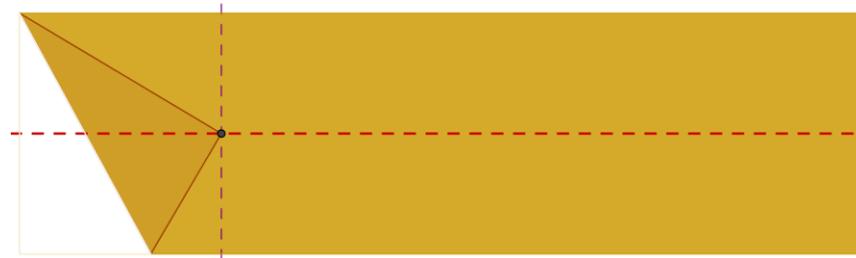
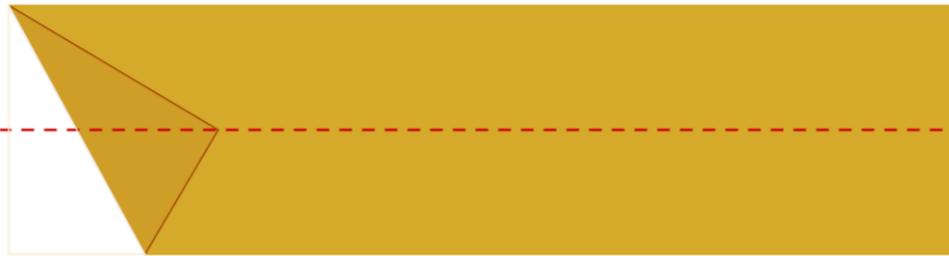


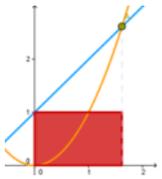
Proporción raíz de 3

Proporciones notables
en geometría



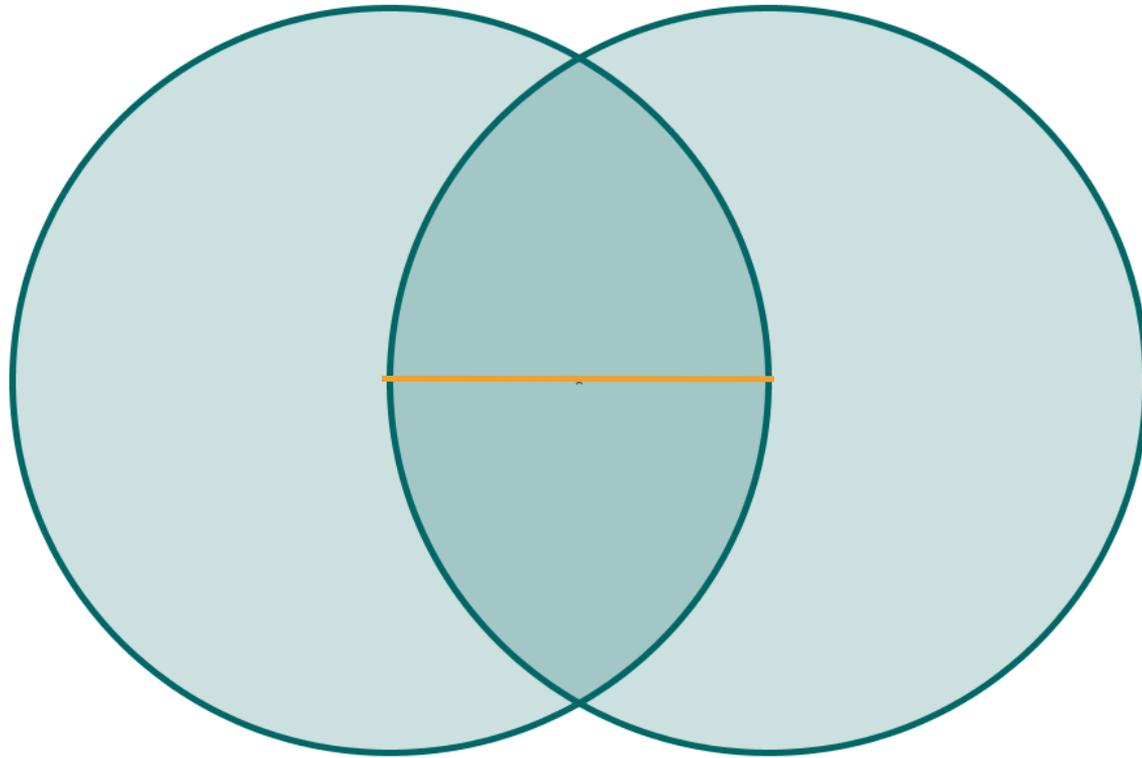
¿Cómo construir un rectángulo de proporción raíz de 3?





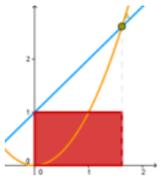
Proporción raíz de 3

Vesica Piscis: Tomando como centro cada uno de los extremos de un segmento, se traza la circunferencia que pasa por el otro extremo.

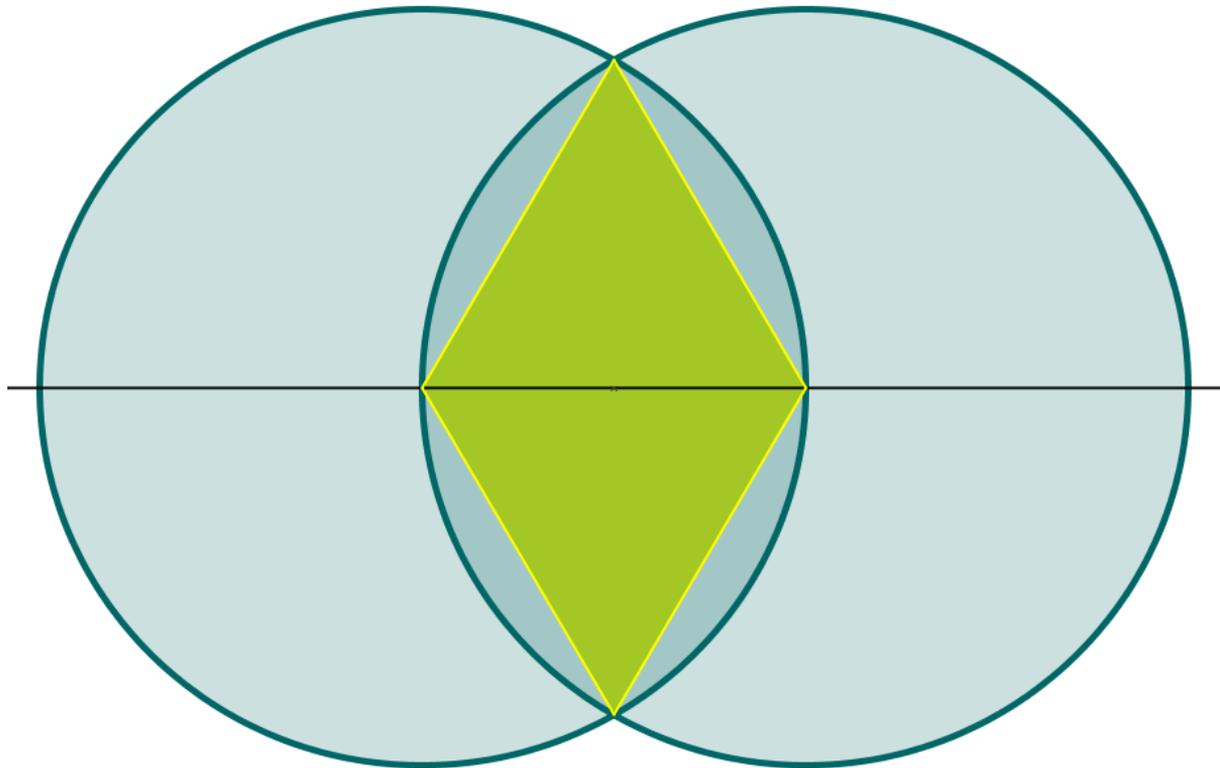


Proporción raíz de 3

Proporciones notables
en geometría

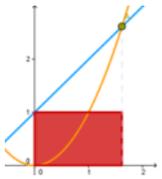


Vesica Piscis: Tomando como centro cada uno de los extremos de un segmento, se traza la circunferencia que pasa por el otro extremo.

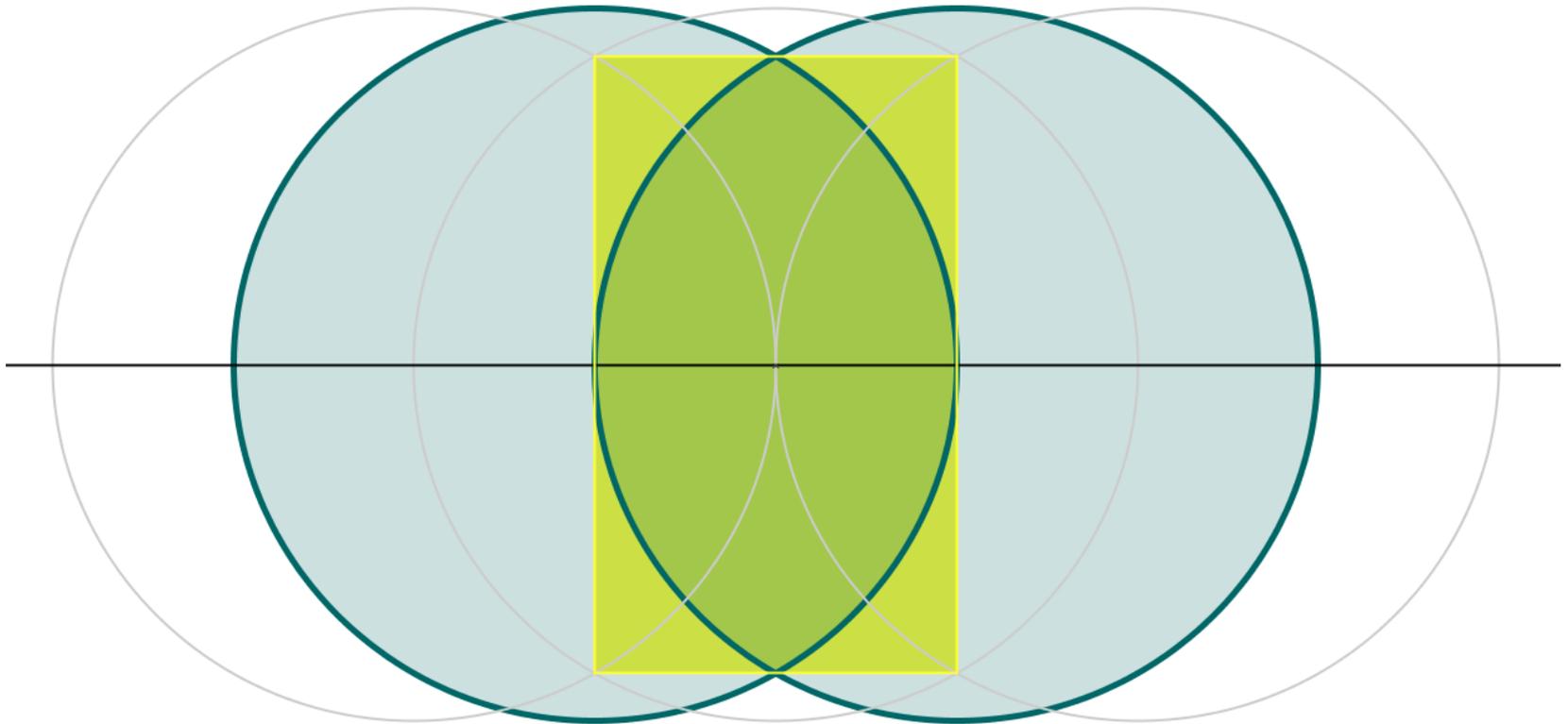


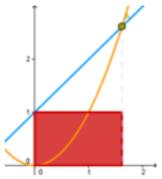
Proporción raíz de 3

Proporciones notables
en geometría



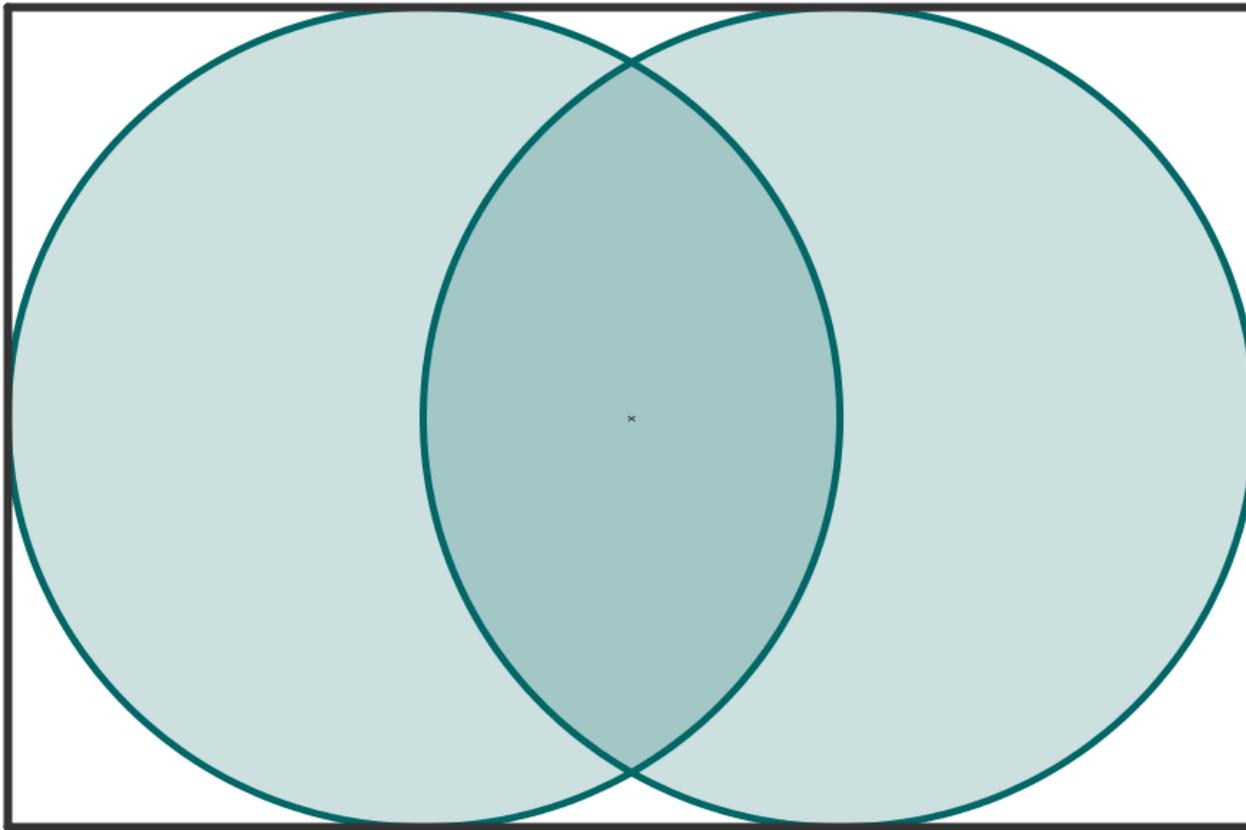
Vesica Piscis





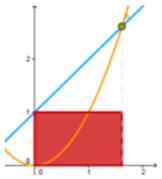
Proporción raíz de 3

Vesica Piscis. El rectángulo en el que se encuadra tiene proporción $3/2$.
Se le llama también rectángulo egipcio

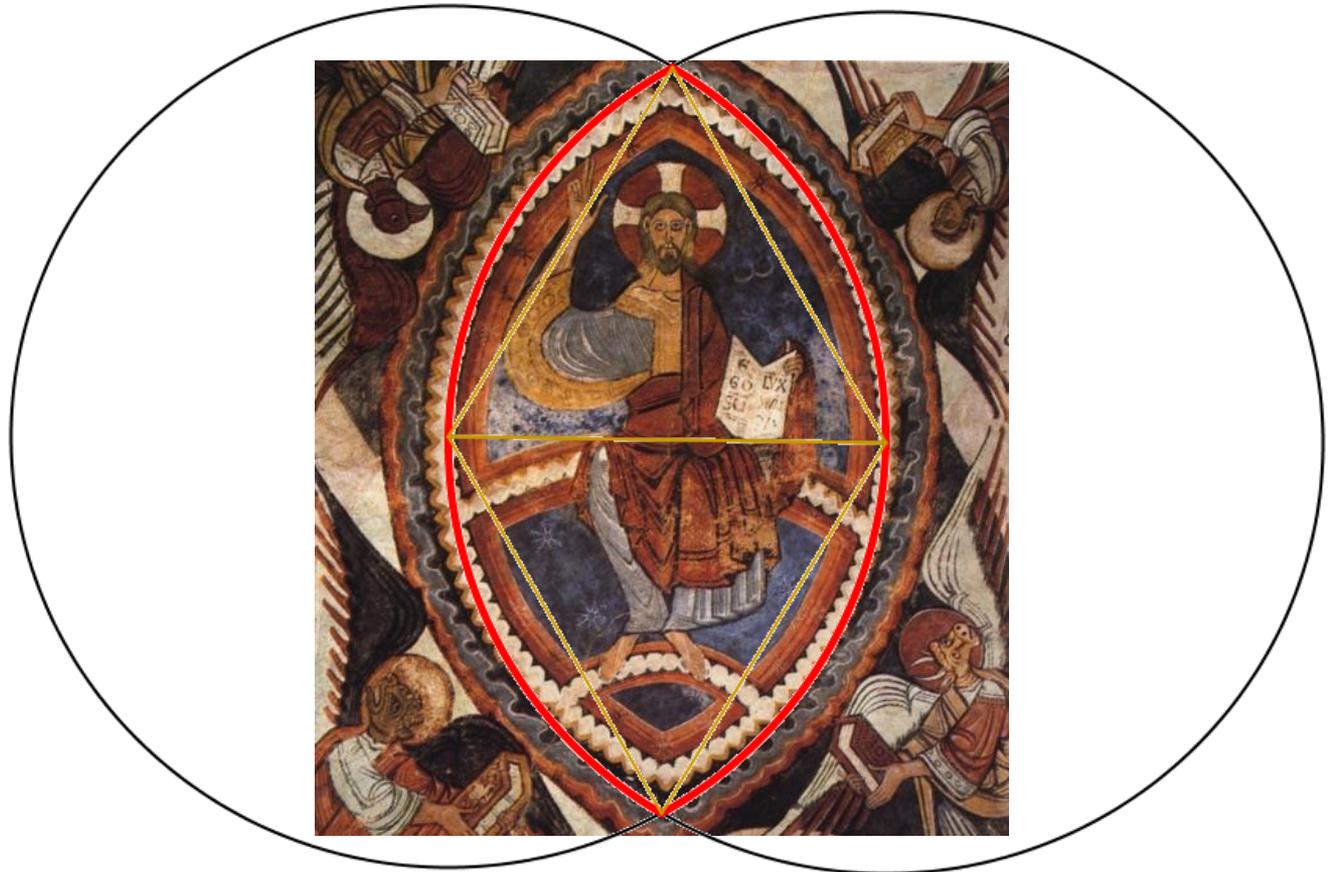


Proporción raíz de 3

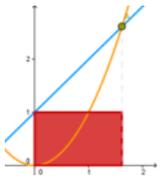
Proporciones notables
en geometría



Vesica Piscis



Pantócrator de San Isidoro de León



Proporción cordobesa

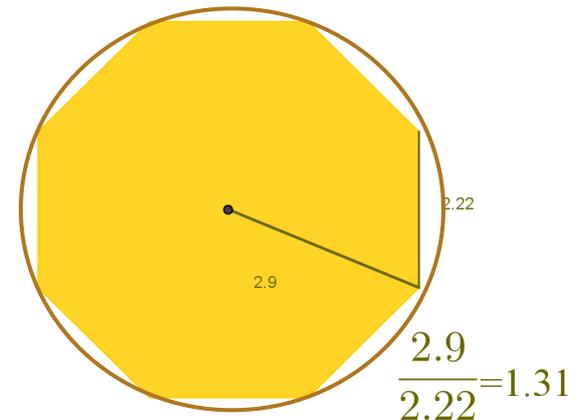
Es la relación que existe entre el radio de la circunferencia circunscrita a un octógono regular y el lado de éste.

Su valor es $c = 1,306562964 \dots$

Concretamente, su valor exacto es

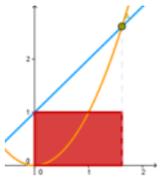
$$\frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 22^{\circ}30'$$

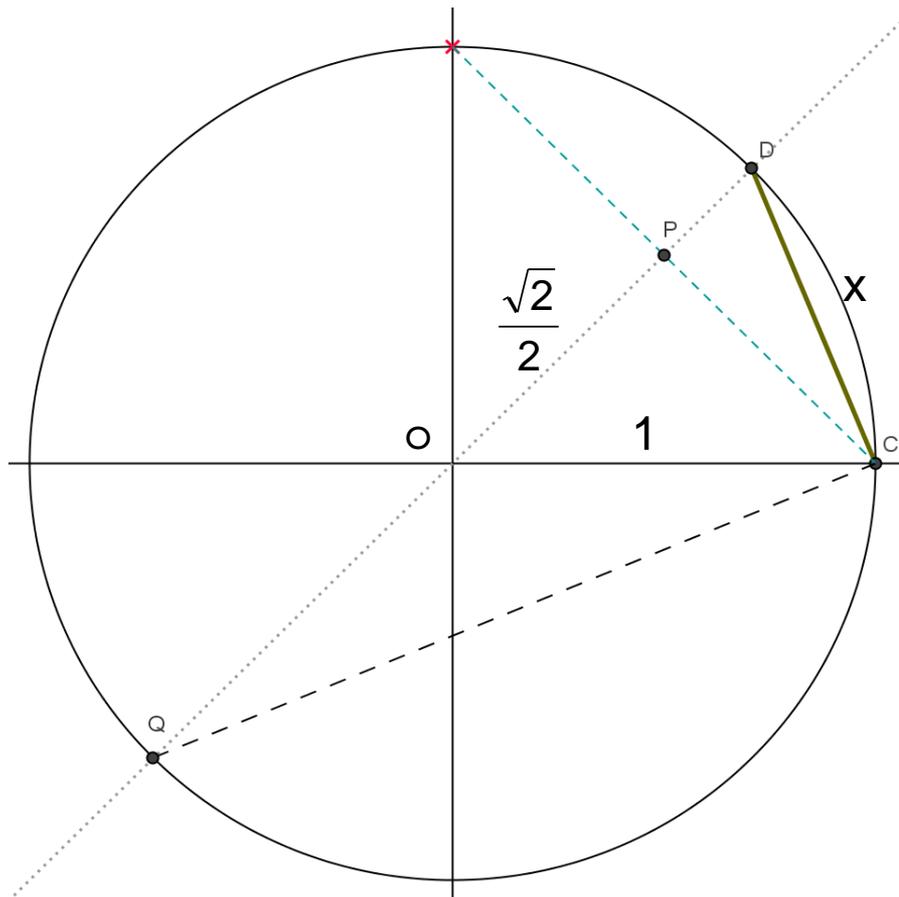


Proporción cordobesa

Proporciones notables
en geometría



VALOR DE LA PROPORCIÓN CORDOBESA



OPC es isósceles

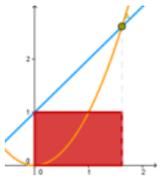
QCD y CPD son semejantes

$$\frac{x}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{2}$$

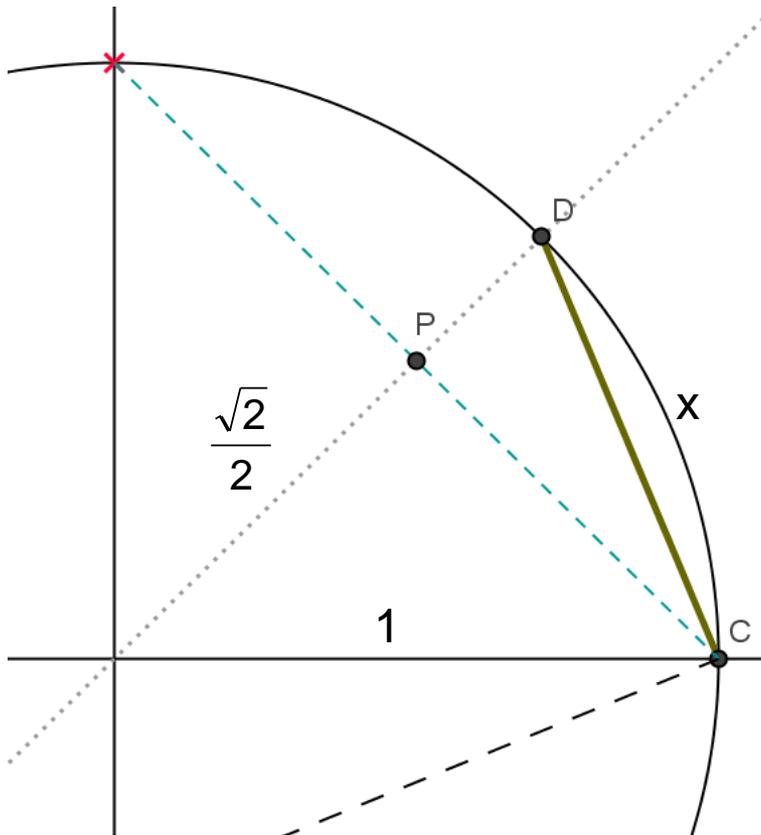
$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\frac{\text{Radio}}{\text{Lado}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$



Proporción cordobesa

VALOR TRIGONOMÉTRICO DE LA PROPORCIÓN CORDOBESA



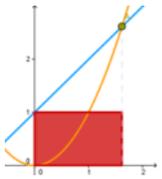
El ángulo PCD mide $22^{\circ} 30'$

$$\cos 22^{\circ} 30' = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos 22^{\circ} 30'}$$

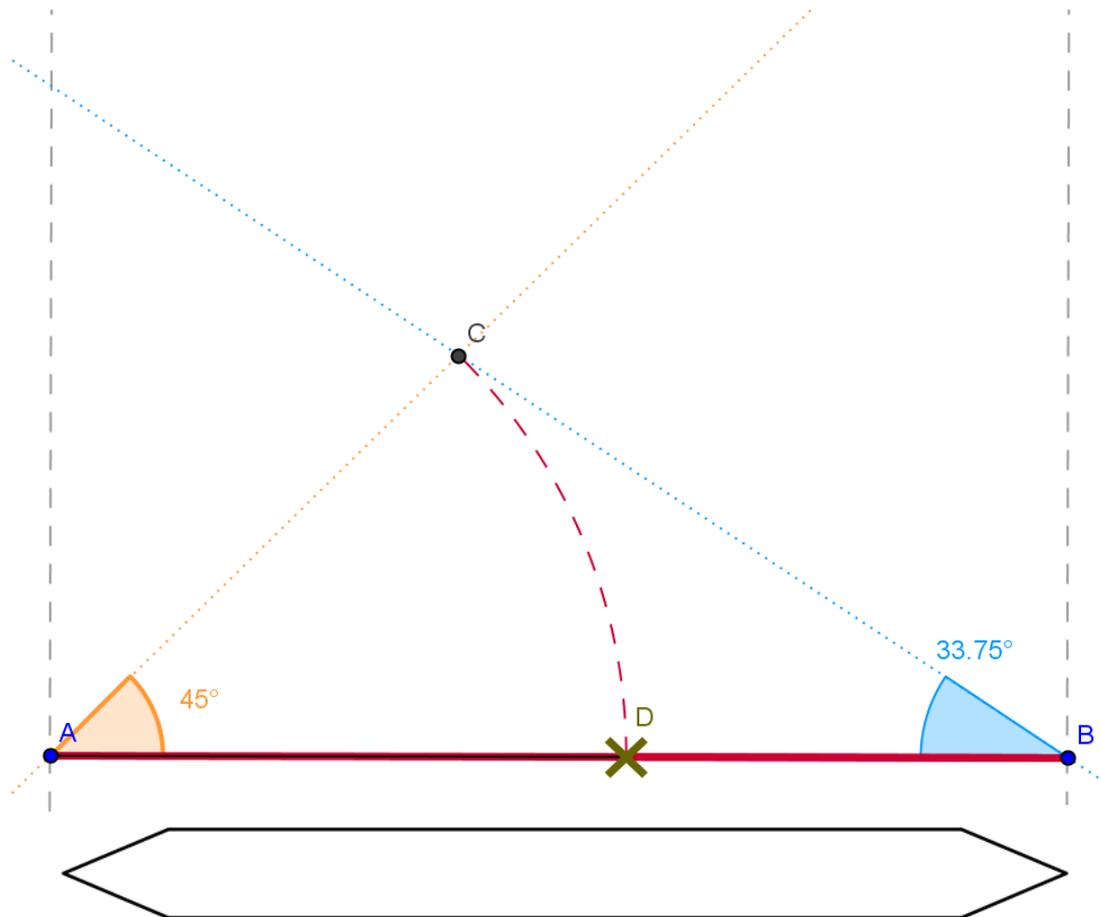
$$\frac{\text{Radio}}{\text{Lado}} = \frac{1}{x} = \frac{\cos 22^{\circ} 30'}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cos 22^{\circ} 30'$$

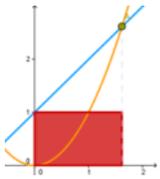
Proporción cordobesa

Proporciones notables
en geometría



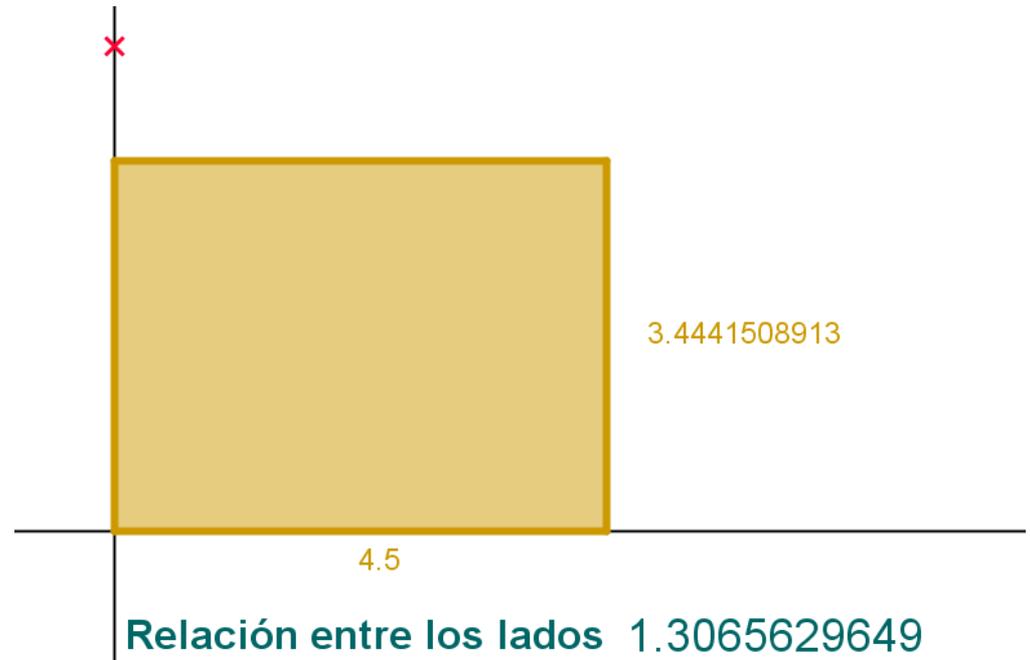
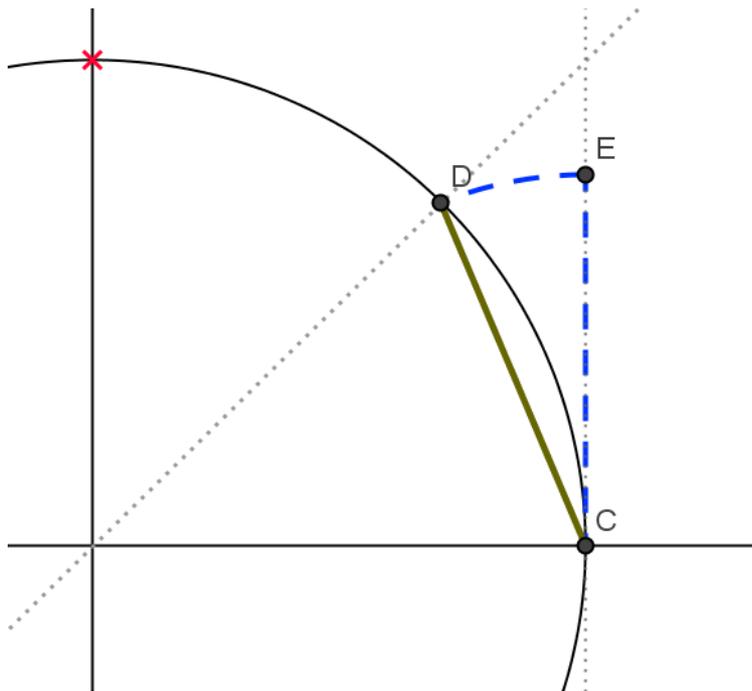
CÓMO DIVIDIR UN SEGMENTO EN PROPORCIÓN CORDOBESA





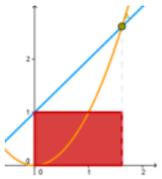
Proporción cordobesa

CÓMO CONSTRUIR UN RECTÁNGULO CORDOBÉS



Proporción cordobesa

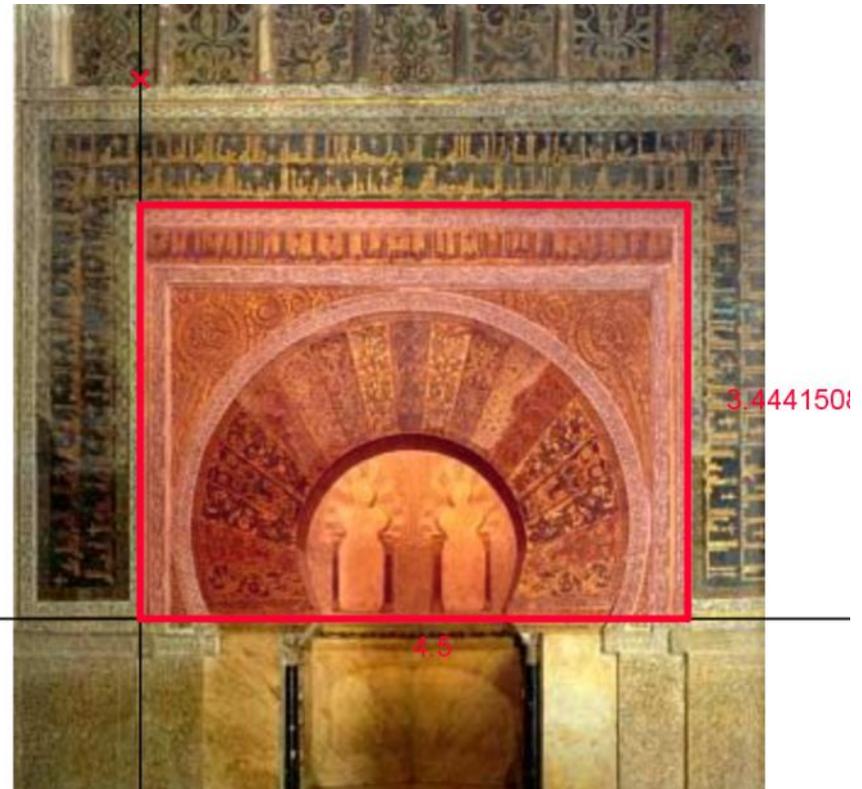
Proporciones notables
en geometría



Se llamó así al ser encontrado por primera vez en la geometría de la Mezquita de Córdoba .

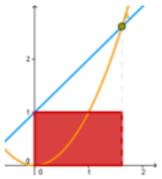


Mirab de la mezquita de Córdoba

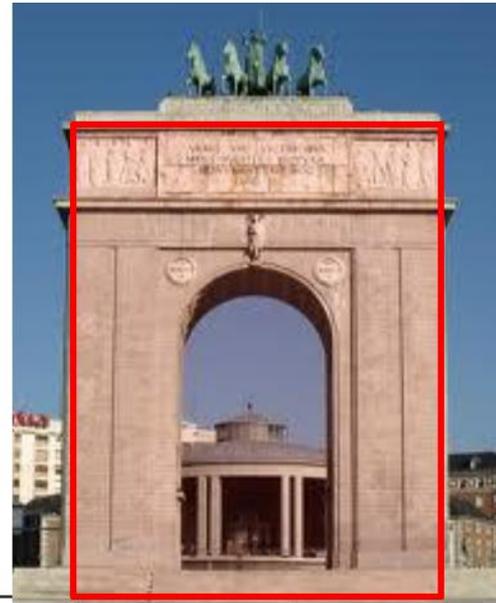


Proporción cordobesa

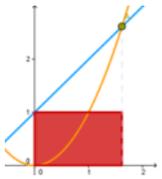
Proporciones notables
en geometría



Arco de la Defensa, París

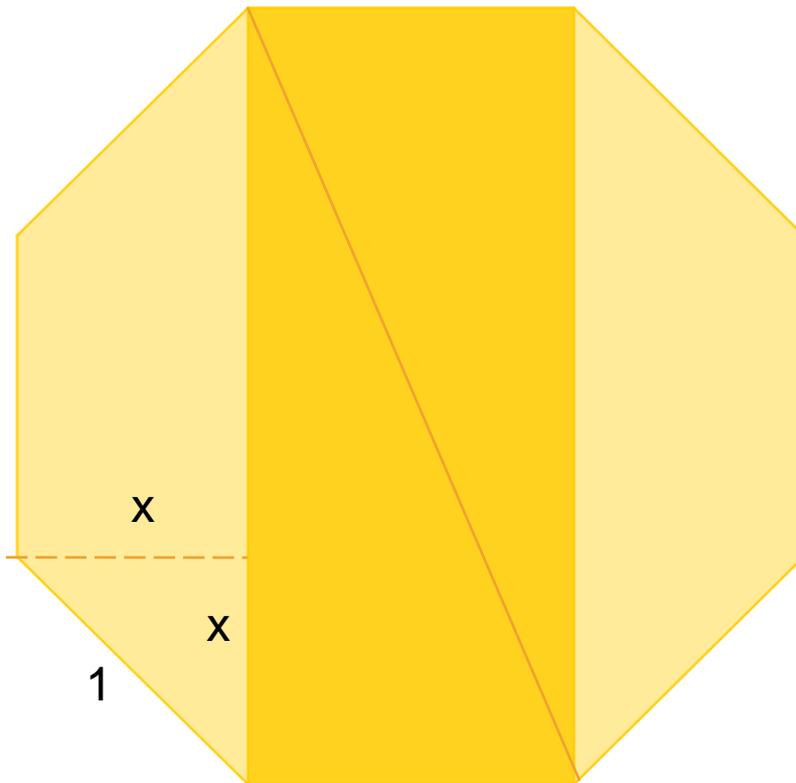


Arco de la Victoria, Madrid



Proporción de plata

También en el octógono regular de lado 1

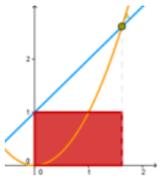


$$x^2 + x^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

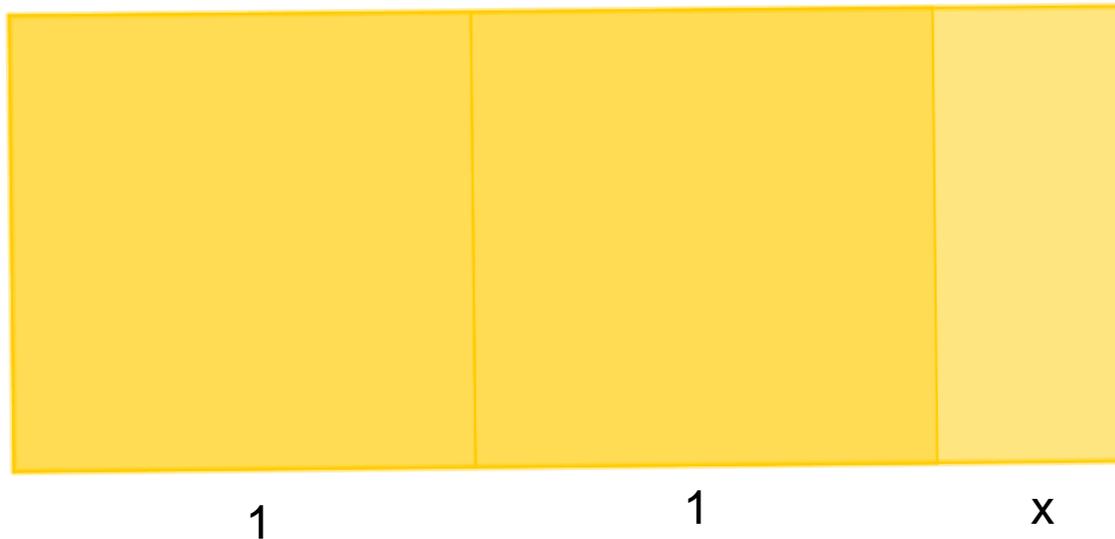
El lado del rectángulo sombreado es

$$1 + 2x = 1 + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$



Proporción de plata

El número de plata es $\delta = 1 + \sqrt{2}$



$$\frac{1}{x} = \frac{2+x}{1}$$

$$1 = 2x + x^2$$

$$x = -1 + \sqrt{2}$$

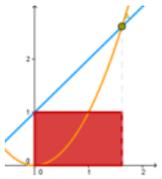
~~$$x = -1 - \sqrt{2}$$~~

Por tanto el lado mayor del rectángulo es $1 + \sqrt{2}$

Si se extrae un cuadrado de un rectángulo raíz de dos, queda un rectángulo de plata

Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



El todo es a la parte, como la parte al resto

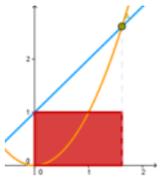


Si el segmento $AC=x$ y el $BC=1$, entonces $AB=x+1$

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \quad \Rightarrow \quad x^2 = x+1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

Proporción áurea

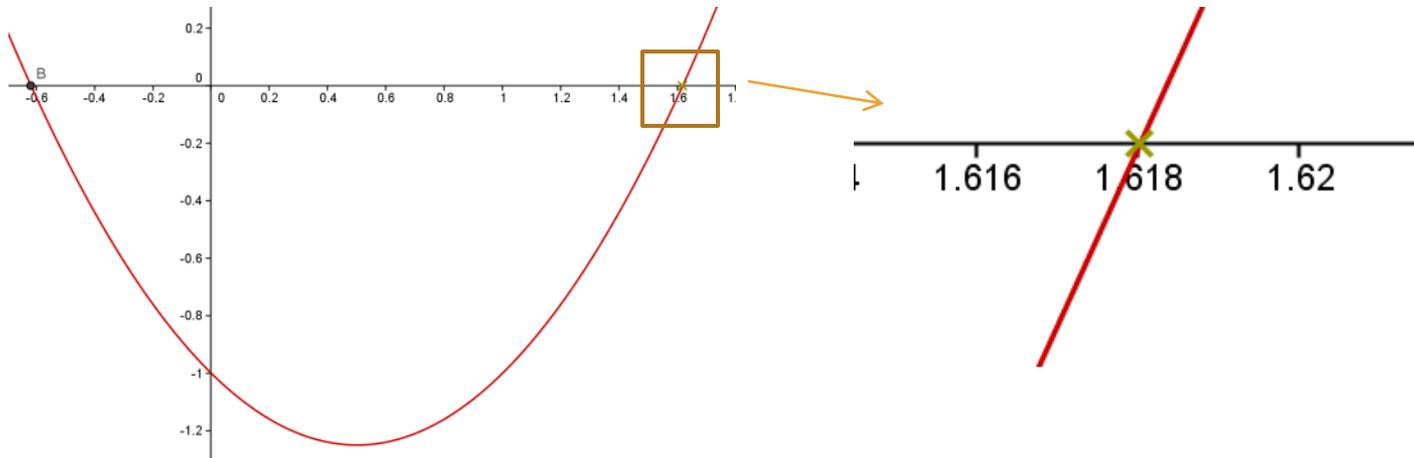
Proporciones notables
en geometría



$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

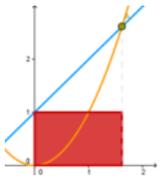
Resolviendo la ecuación se obtiene el valor positivo: $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Cuyo valor aproximado es **1,61803...**



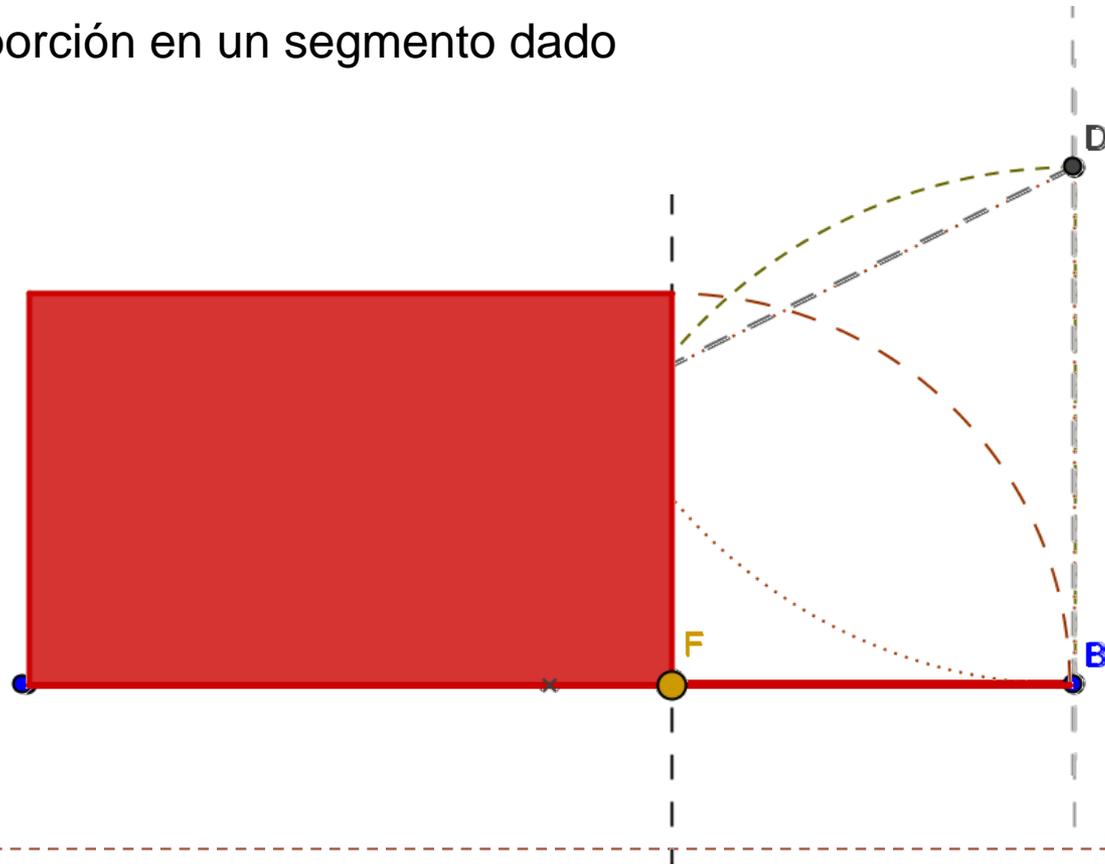
Proporción áurea

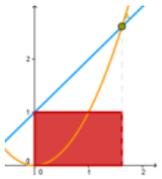
Proporciones notables
en geometría



¿CÓMO CONSTRUIR UN RECTÁNGULO DE ESTAS PROPORCIONES?

Buscando la proporción en un segmento dado

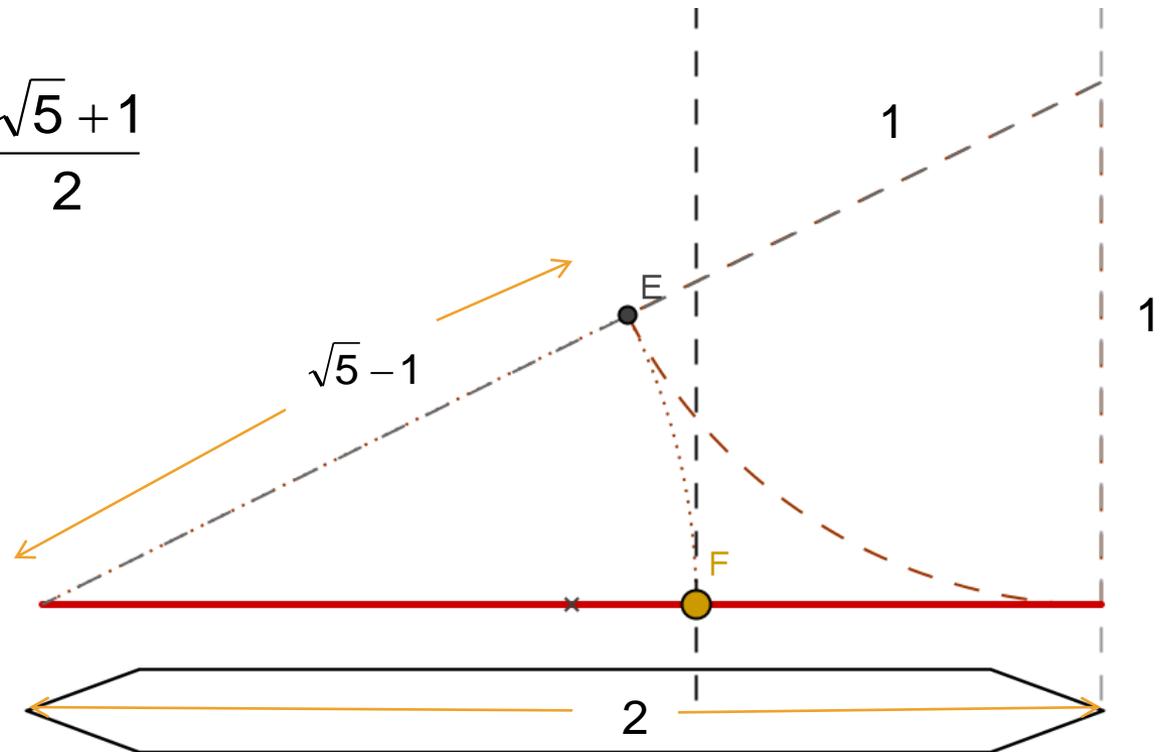




Proporción áurea

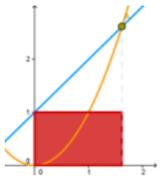
¿CÓMO CONSTRUIR UN RECTÁNGULO DE ESTAS PROPORCIONES?

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



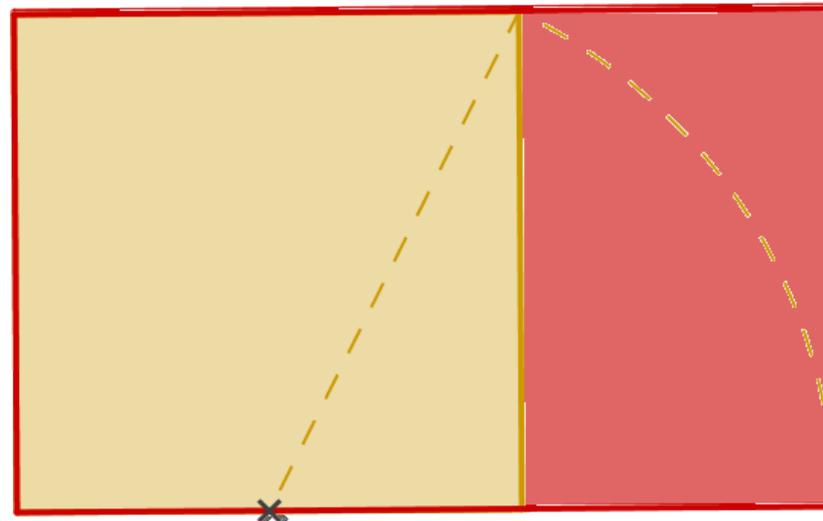
Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



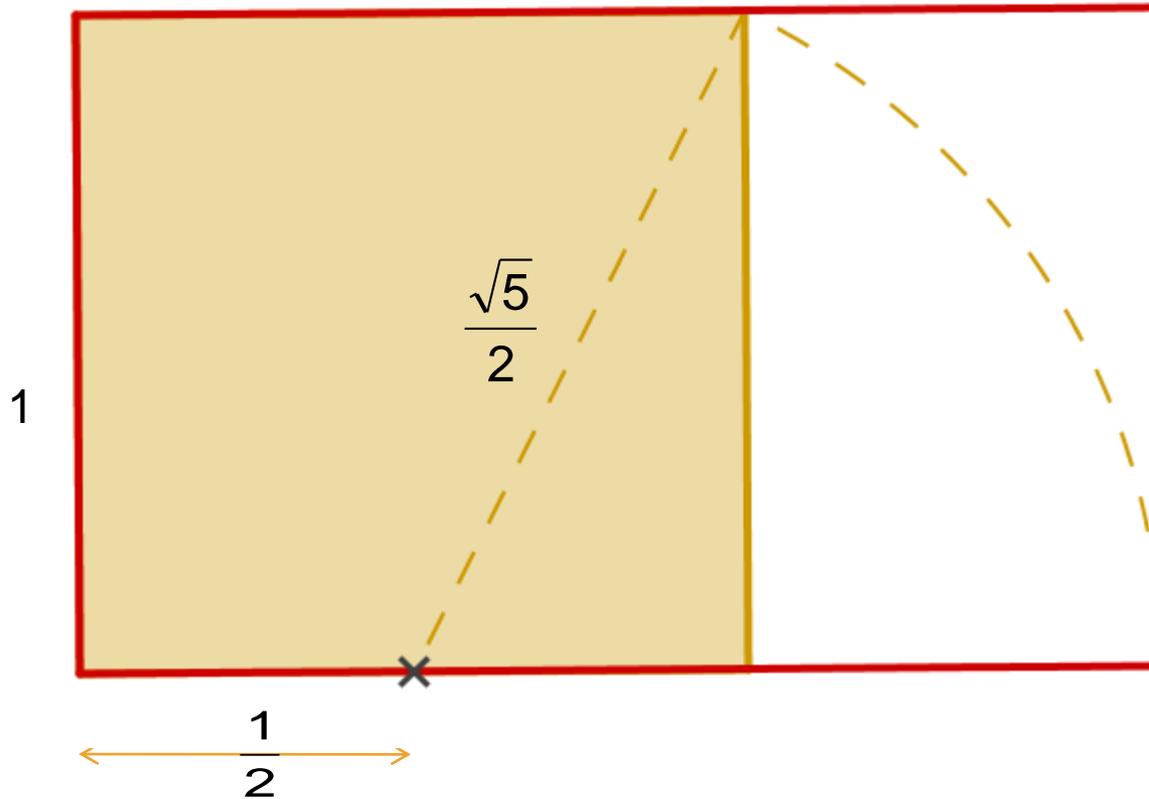
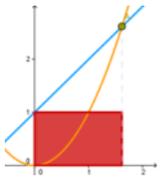
¿CÓMO CONSTRUIR UN RECTÁNGULO DE ESTAS PROPORCIONES?

- ▶ Primero, dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Luego, lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo.



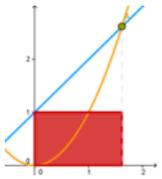
Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



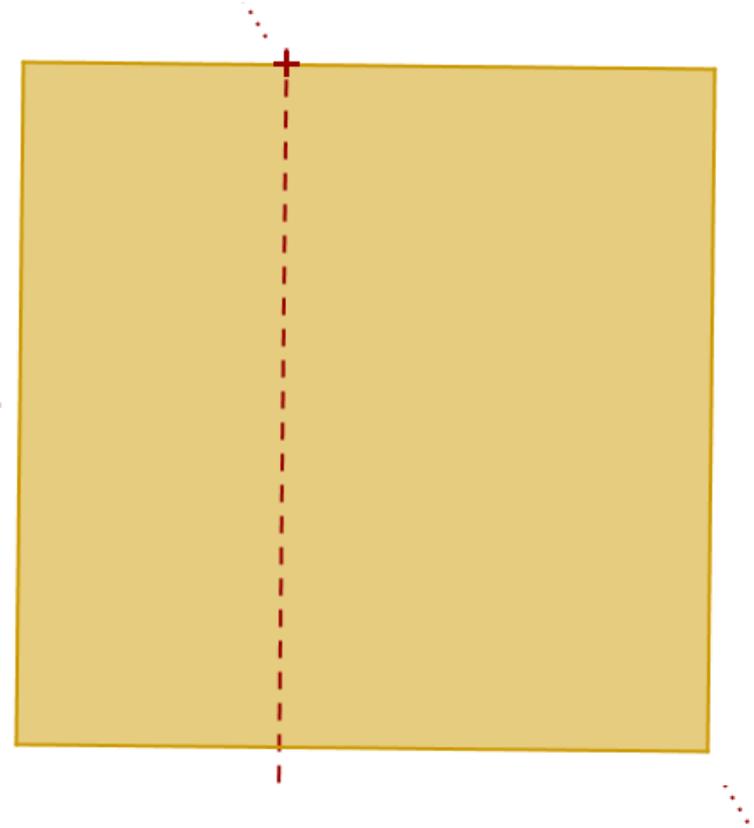
Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



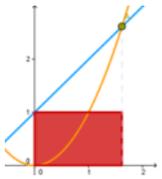
Otra forma de construirlo

Papiroflexia

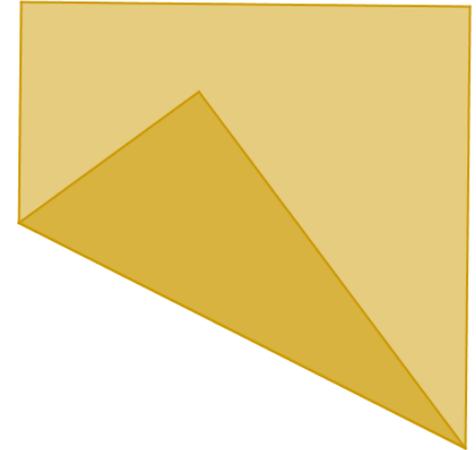
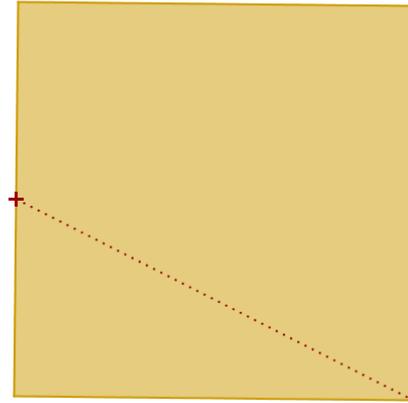


Proporción áurea

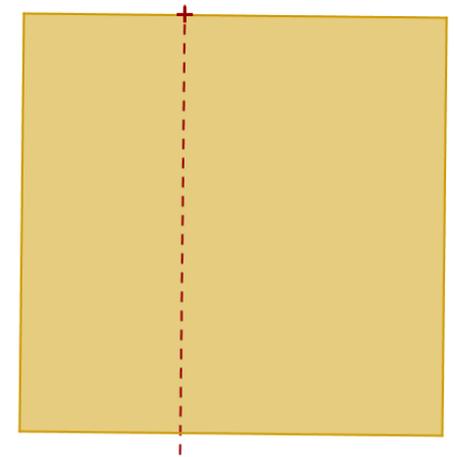
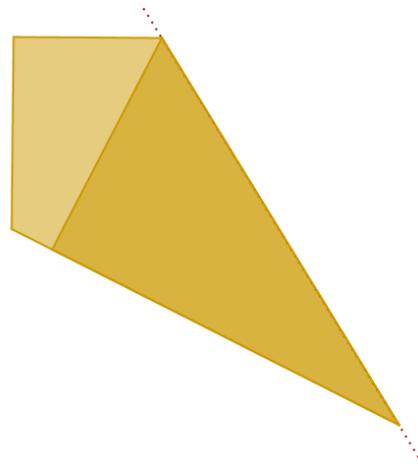
Proporciones notables
en geometría



Otra forma de construirlo

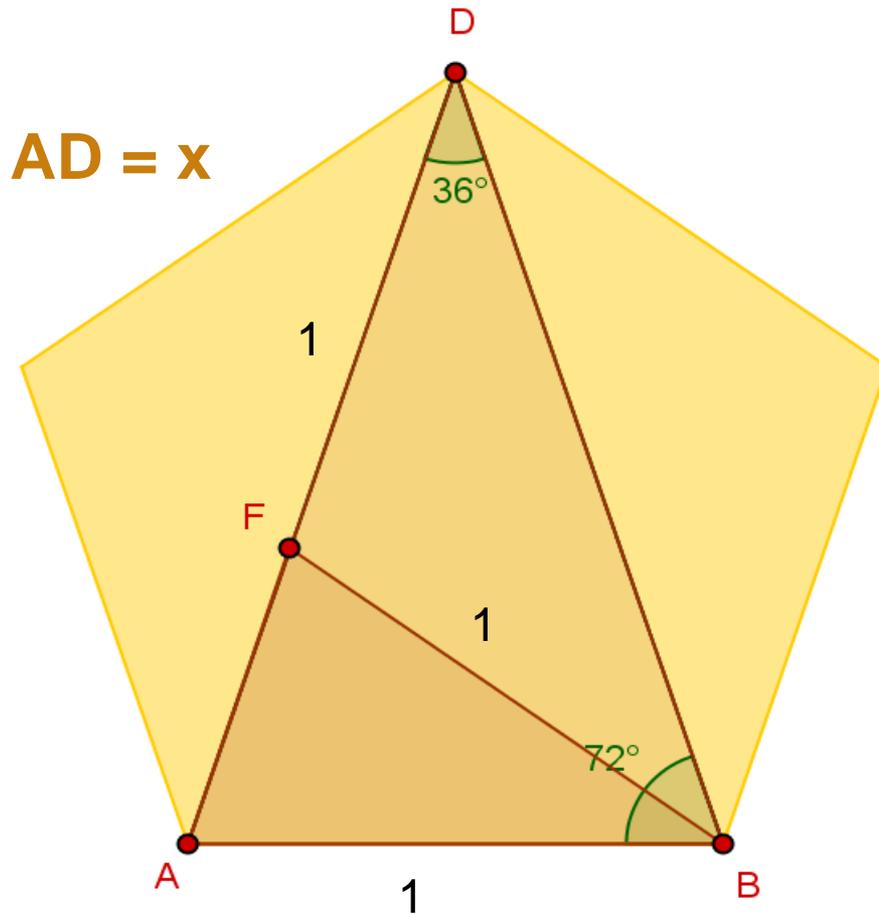


Papiroflexia



Proporción áurea

Es la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular



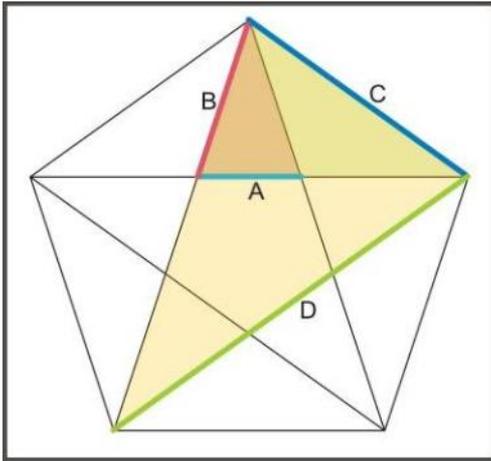
Los triángulos ABD y AFB son isósceles y semejantes

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

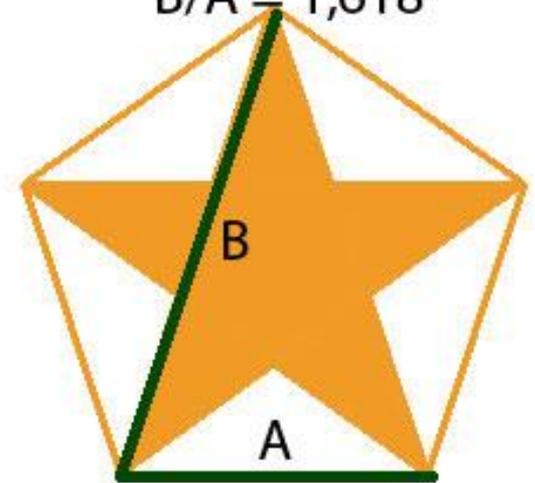
$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Proporción áurea

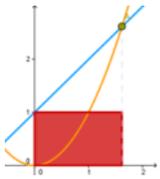


$$B/A = 1,618$$

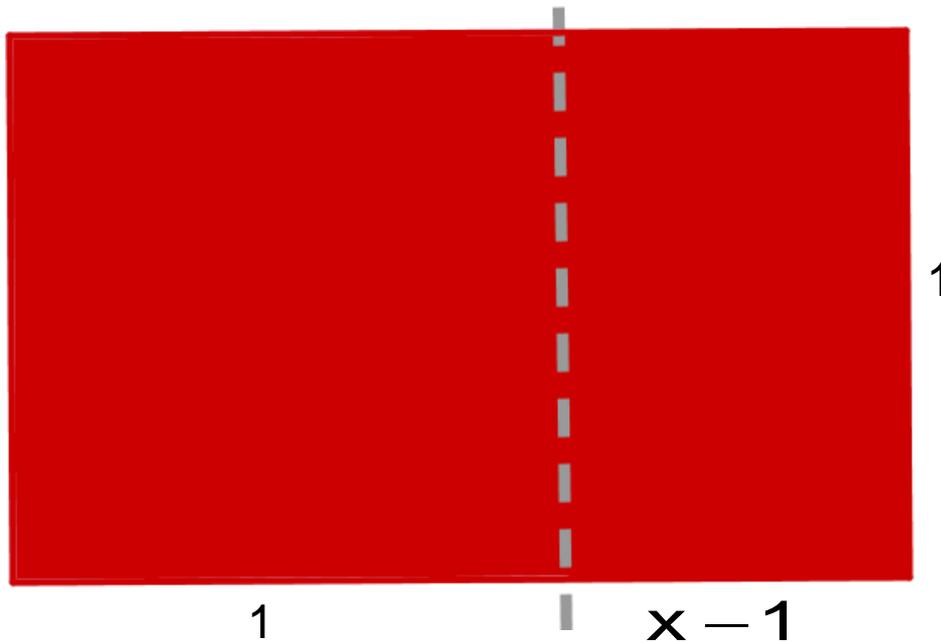


Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



El rectángulo áureo tiene la propiedad de que al quitar el mayor cuadrado posible, el rectángulo que queda es semejante al inicial.

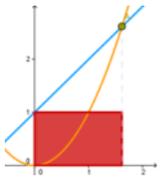


$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

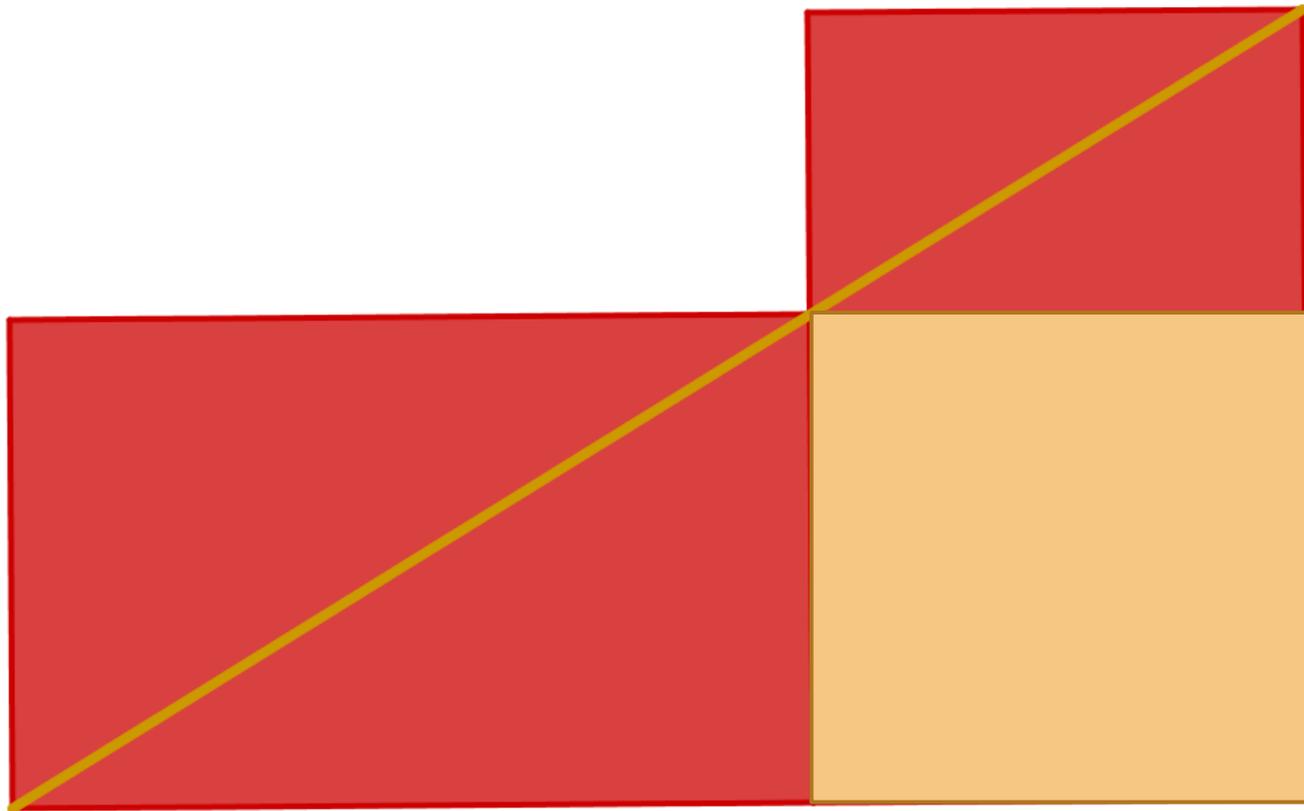
$$x^2 - x - 1 = 0$$

Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría

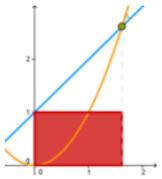


¿Cómo comprobar que un rectángulo es áureo?

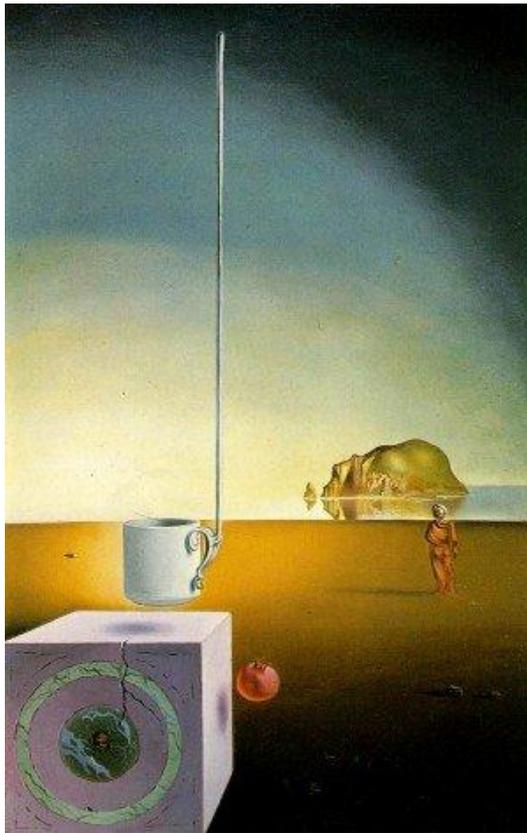


Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría

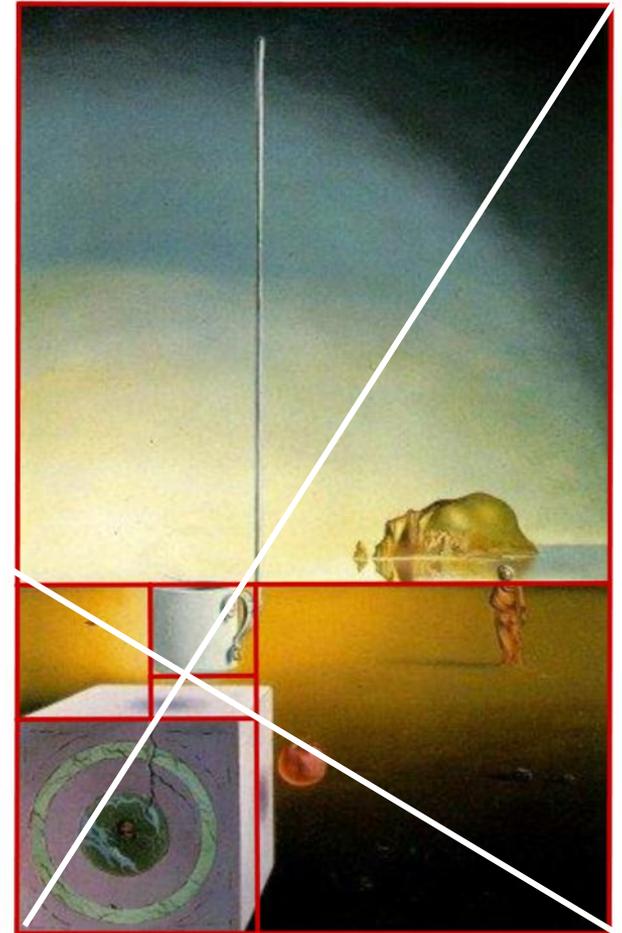


Repitiendo el proceso de quitar un cuadrado...



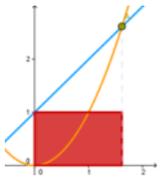
Taza gigante
volante con
anexo inexplicable
de cinco
metros de
longitud.
(1944-1945)

Salvador Dalí
(1904-1989)

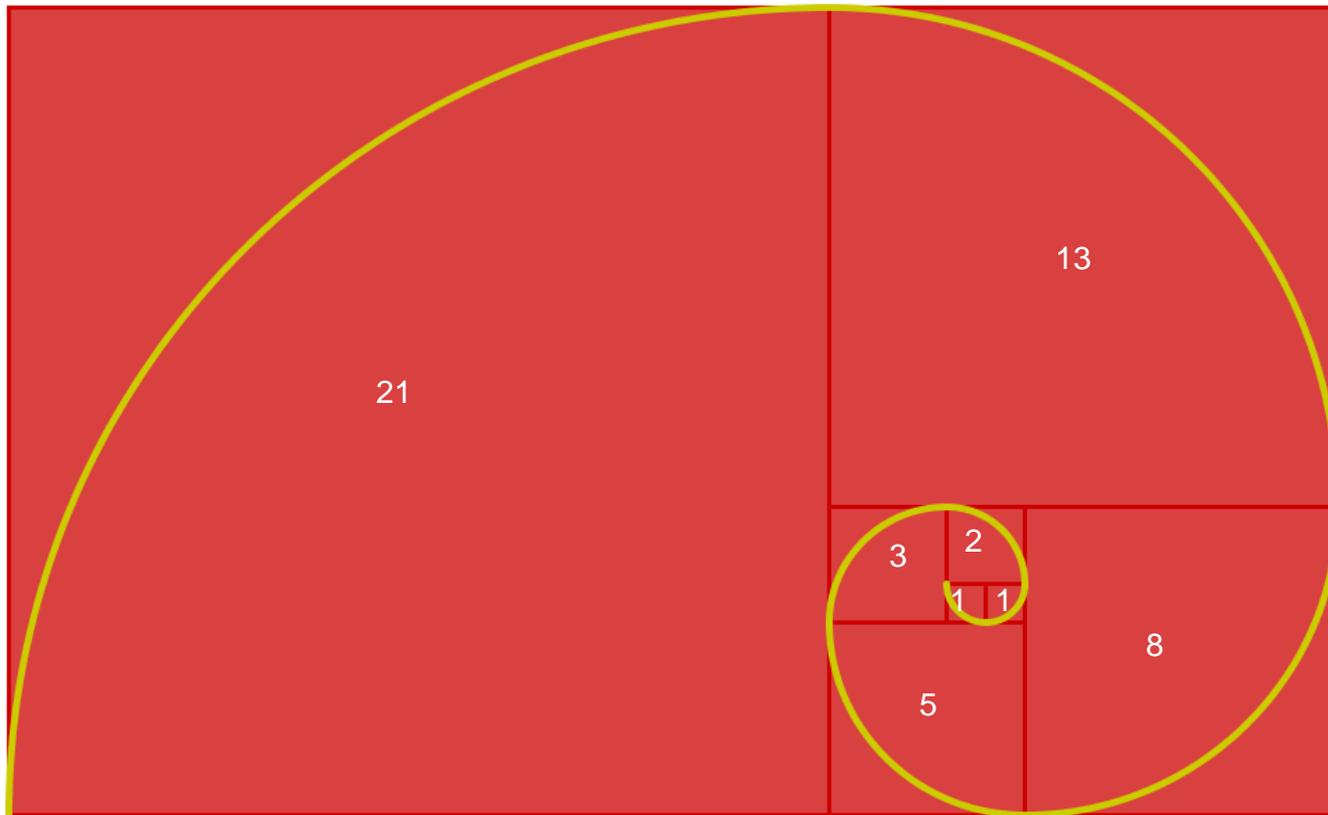


Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría

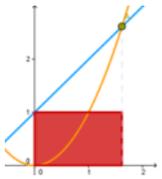


Podemos llegar a una construcción similar de rectángulos con un proceso inverso:



Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría

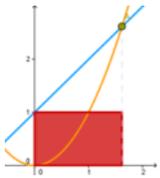


La sucesión de Fibonacci y el número áureo

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



La sucesión de Fibonacci y el número áureo

$$1 : 1 = 1$$

$$2 : 1 = 2$$

$$3 : 2 = 1'5$$

$$5 : 3 = 1'66666666$$

$$8 : 5 = 1'6$$

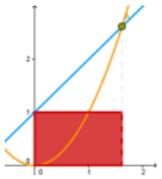
$$13 : 8 = 1'625$$

$$21 : 13 = 1'6153846....$$

$$34 : 21 = 1'6190476....$$

$$55 : 34 = 1'6176471....$$

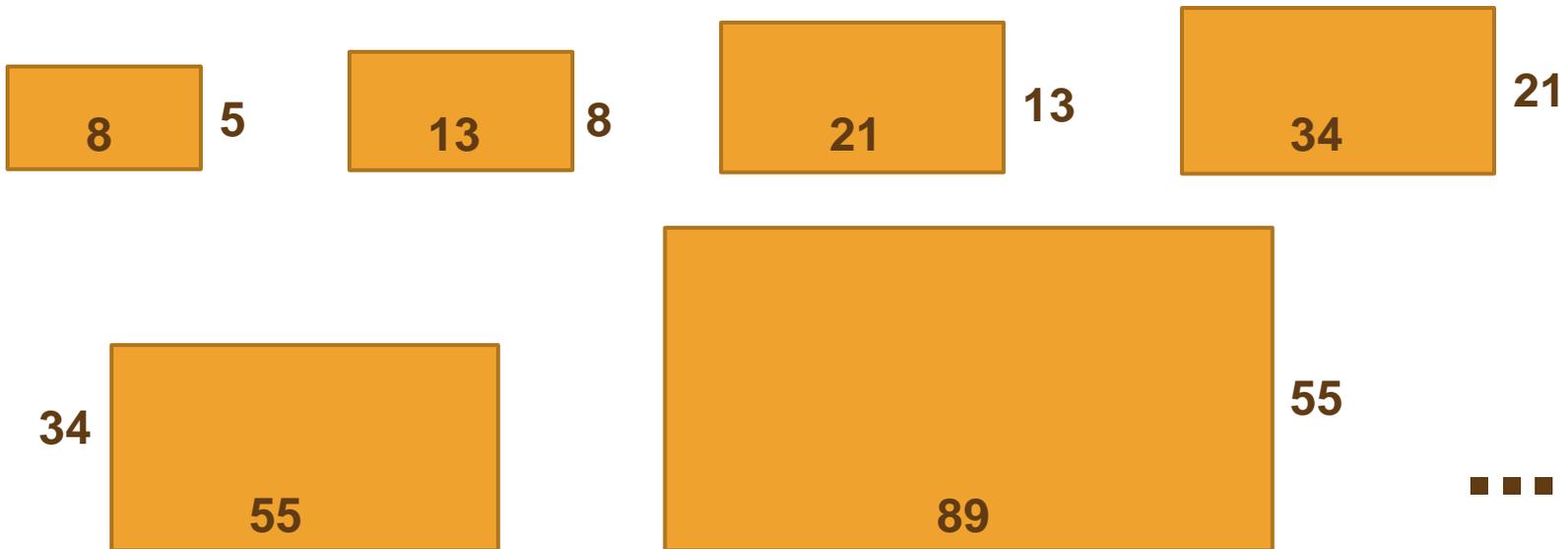
$$89 : 55 = 1'6181818....$$



Proporción áurea

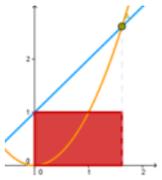
Podemos construir rectángulos cuyos lados sean términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

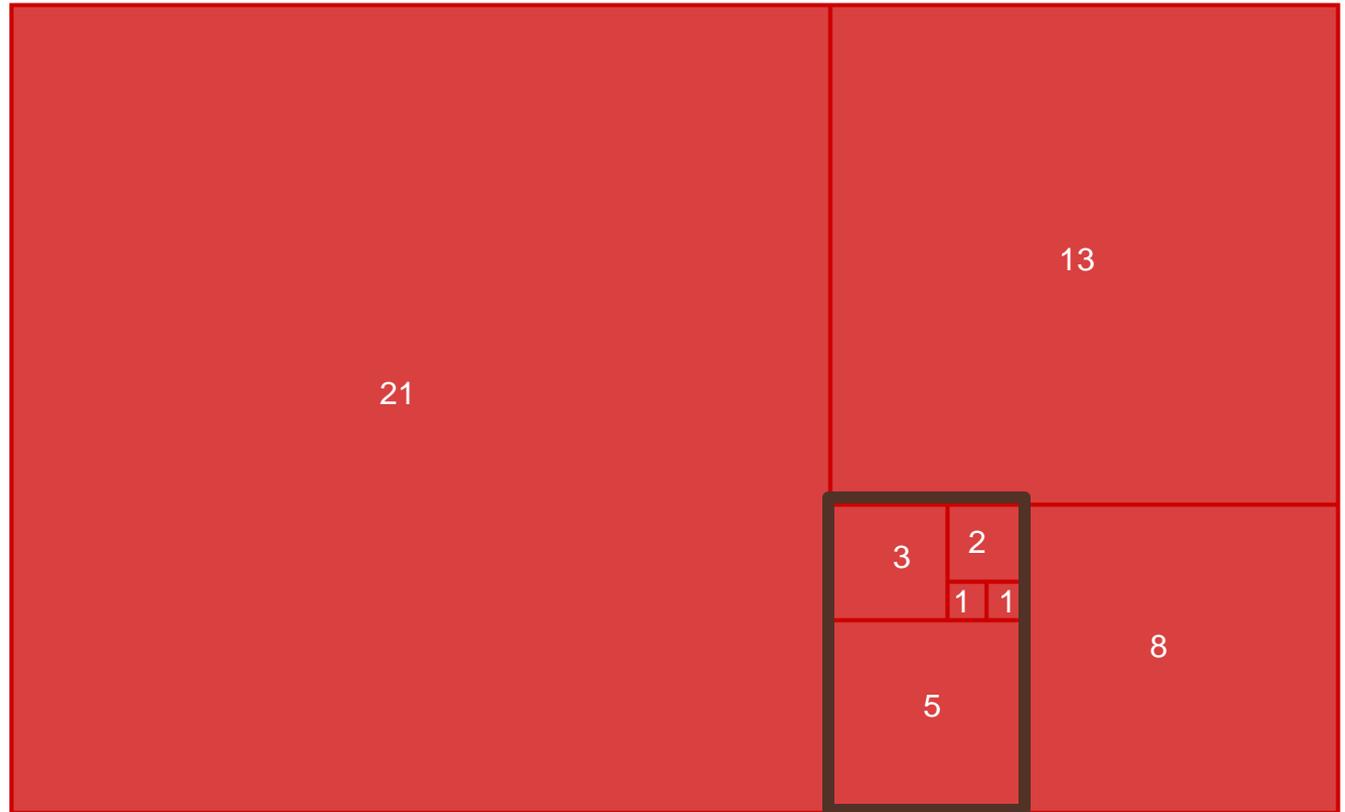


Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



Calculamos áreas :

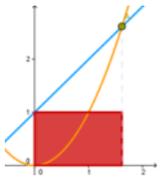


$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40$$

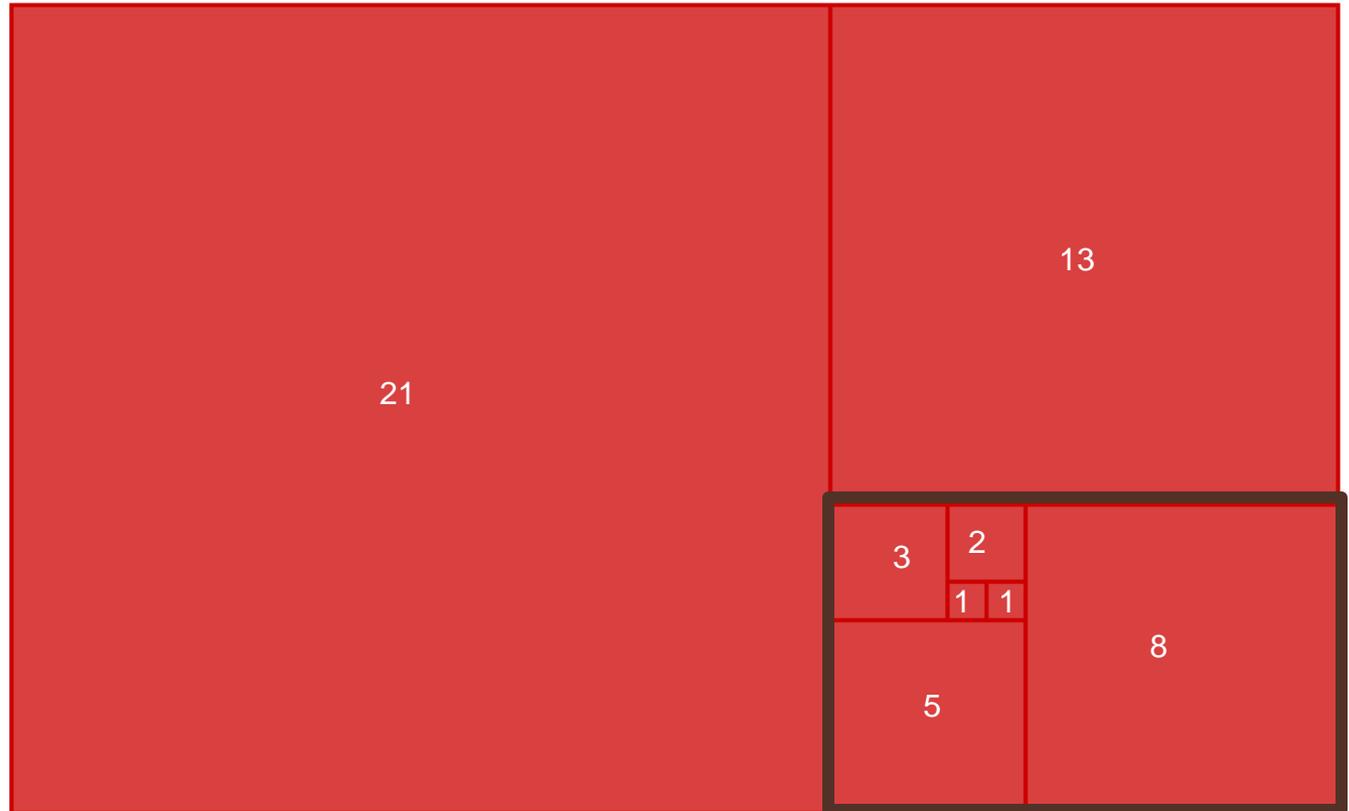
$$8 \times 5 = 40$$

Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



Calculamos áreas :

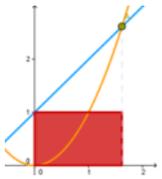


$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104$$

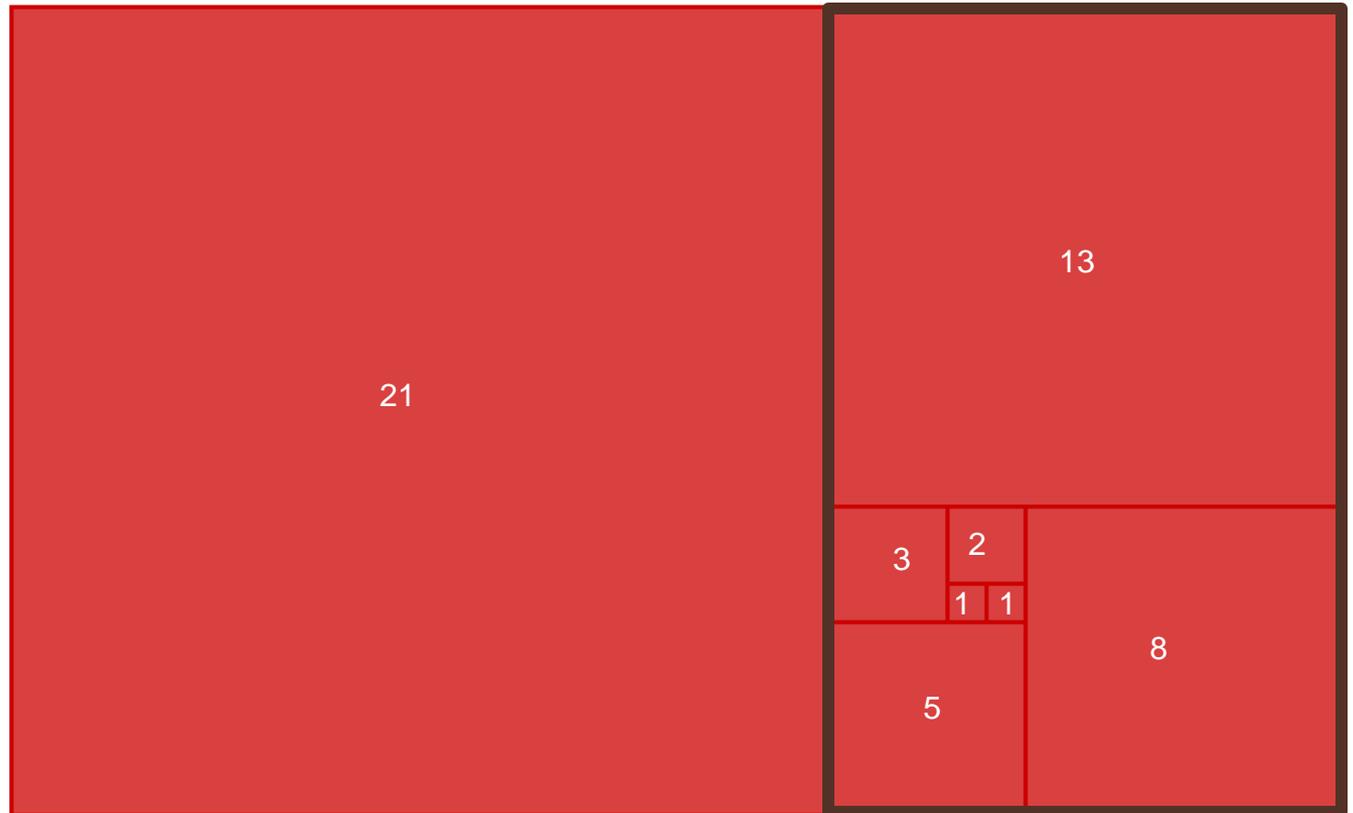
$$13 \times 8 = 104$$

Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



Calculamos áreas :

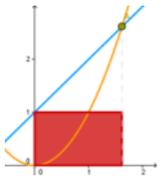


$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 273$$

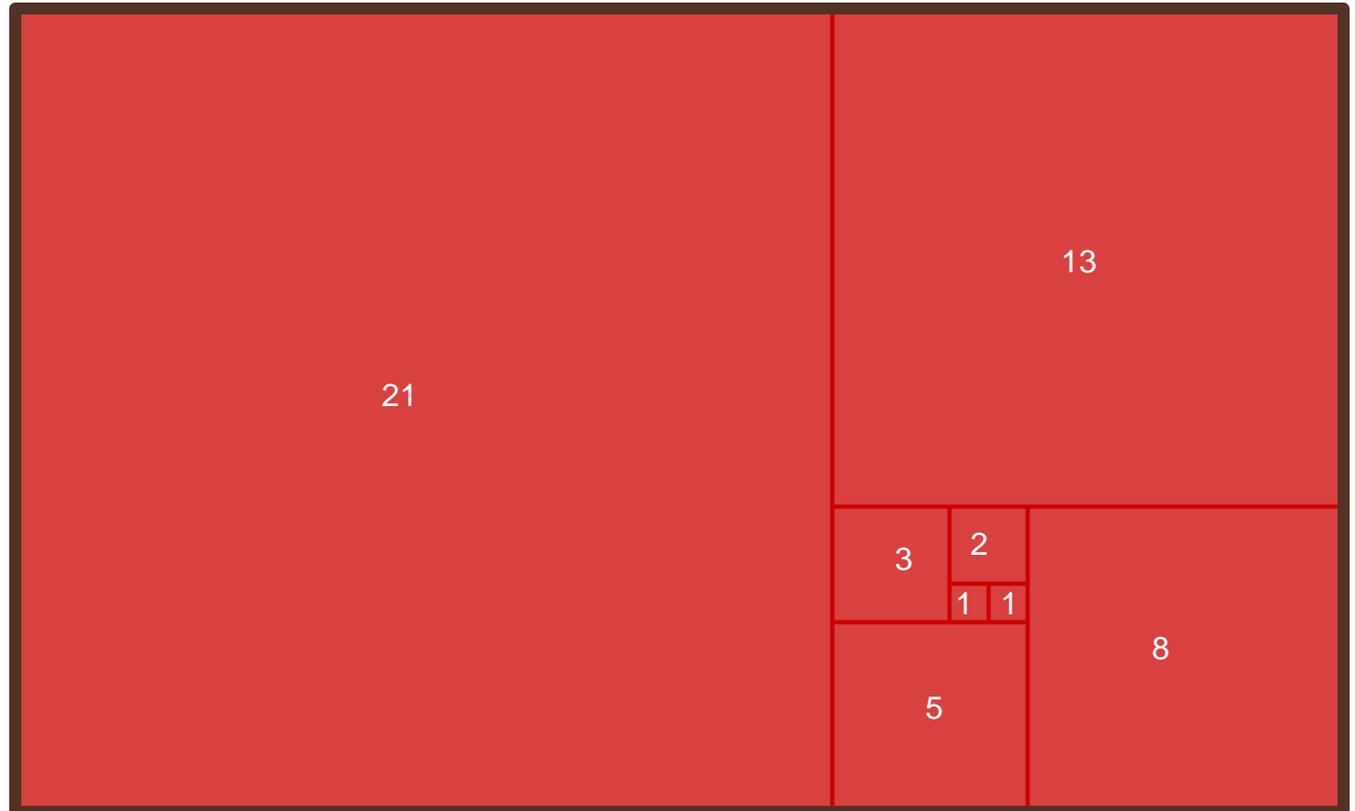
$$21 \times 13 = 273$$

Proporción áurea

Proporciones notables
en geometría



Calculamos áreas :

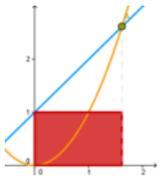


$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 = 714$$

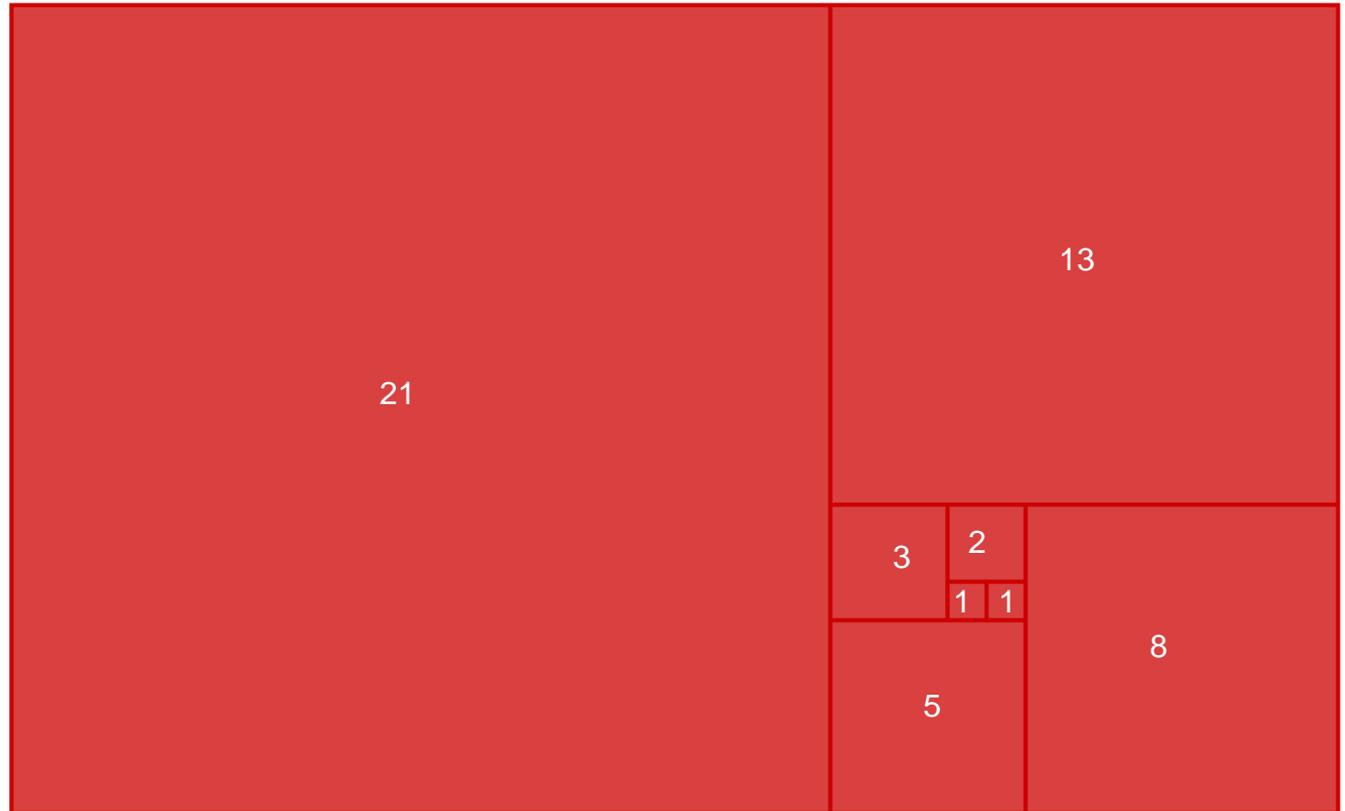
$$34 \times 21 = 714$$

Proporción áurea

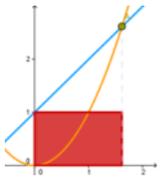
Proporciones notables
en geometría



Generalizando



$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_{n+1} \times F_n$$



Para terminar

Un cortometraje inspirado en números, la geometría sagrada y la naturaleza.

Realizado por Cristóbal Vila.

De Etérea Estudios

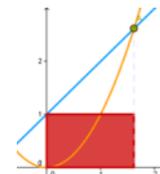
Zaragoza



<http://www.youtube.com/watch?v=ME-bLr7mGL4>

Bibliografía

Proporciones notables
en geometría



- FERNÁNDEZ I., REYES E. *Geometría del hexágono y el octógono*. Proyecto Sur de ediciones. Granada, 2003
- VVAA. *Papiroflexia y Matemáticas*, Revista 1, nº 53. Editorial Grao, 2010
- VVAA. *La proporción: arte y matemáticas*. Biblioteca de UNO. Editorial Grao, 2009
- SKINNER S. *Geometría Sagrada*. Gaia Ediciones. Madrid, 2007
- CORBALÁN F. *La proporción áurea*. Colección El mundo es matemática. RBA editores, 2010
- Sobre el video:
http://www.etereaestudios.com/docs_html/nbyn_hm/about_index.htm