Preparación para la LI Olimpiada Matemática Española (II) Soluciones

Adrián Franco Rubio

7 de noviembre de 2014

1. En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar? *(OME Fase Local 2002)*

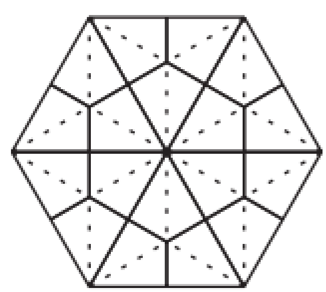
   Solución. Hay $\binom{11}{6}$ elecciones posibles. La suma de los números de las camisetas de los elegidos será impar si hay entre ellos una cantidad impar de números impares. Escribamos ahora los casos favorables. Hay 6 números impares y 5 pares.

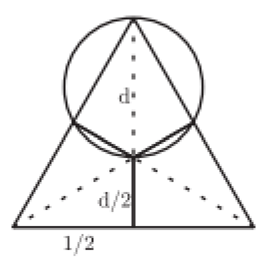
   - Una camiseta impar y 5 pares: $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{5} = 6 \cdot 1$
   - Tres camisetas impares y 3 pares: $\binom{6}{3} \cdot \binom{5}{3} = 20 \cdot 10$
   - Cinco camisetas impares y 1 par: $\binom{6}{5} \cdot \binom{5}{1} = 6 \cdot 5$

   Así pues, la probabilidad pedida será $\dfrac{6 \cdot 1 + 20 \cdot 10 + 6 \cdot 5}{\binom{11}{6}} = \dfrac{236}{462} = \dfrac{118}{231}$

2. En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$. *(OME Fase Local 2011)*

   Solución. Dividamos el hexágono regular en 6 triángulos equiláteros iguales. Cada uno de ellos, si trazamos sus alturas, quedará dividido en 6 triángulos rectángulos. Uniendo estos triángulos rectángulos, dos a dos, por sus hipotenusas, habremos dividido el hexágono original en 18 regiones iguales. Como tenemos 19 puntos, en alguna de estas regiones debe





   haber al menos 2 puntos. Para ver que estos dos puntos están como mucho a distancia $\sqrt{3}/3$, sólo hay que probar que dicha región está inscrita en una circunferencia de diámetro $\sqrt{3}/3$. Pero la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es la que tiene como diámetro la hipotenusa, por tanto, nuestra región está inscrita en una circunferencia de diámetro d, donde d es la hipotenusa de cualquiera de los dos triángulos rectángulos que la componen. Sólo tenemos que demostrar que $d \leq \sqrt{3}/3$. Para ello basta observar que la altura del triángulo equilátero de lado 1 es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$, y de aquí se tiene, por cómo divide el baricentro a una mediana, $\sqrt{3}/2 = d + d/2$. De donde $d = \sqrt{3}/3$.

3. Sean $P_1, \ldots, P_{11}$ once puntos distintos sobre una recta. Para cada par de ellos la distancia que los separa es menor que 1. Demuestra que la suma de todas las distancias P_iP_j es menor que 30. *(Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993)*

   Solución[1] . Sin pérdida de generalidad supongamos que los puntos se encuentran ordenados sobre la recta, del P_1 al P_{11}. Si tomamos dicha recta como eje x podemos describir las distancias entre puntos en función de sus coordenadas x: $P_iP_j = x_i - x_j$. Situando el origen de coordenadas en P_1, dado que $P_1P_{11} = x_{11} \leq 1$, resulta que para todo i, $0 \leq x_i \leq 1$. La suma de todas las distancias es $\sum_{1 \leq i < j \leq 11} x_j - x_i$. Contemos ahora para todo k cuántas veces aparecen los sumandos $+x_k$ y $-x_k$ en dicha suma. En el primer caso tenemos $k-1$ posibles valores de i tales que $x_k - x_i$ es uno de los sumandos, de modo que que $+x_k$ aparece exactamente $k-1$ veces en la suma. En el segunda caso, disponemos de $11-k$ posibles valores para j tales que $x_j - x_k$ es uno de los sumandos, de modo que $-x_k$ aparece exactamente $11-k$ veces. Contamos, pues, x_k un total de $(k-1)-(11-k) = 2k-12$ veces; y la suma de todas las distancias es por ende $\sum_{k=1}^{11}(2k-12)x_k = 2\sum_{k=1}^{11}(k-6)x_k$. Puesto que $x_k \geq 0$ tenemos que para $k \leq 6$ se cumple $(k-6)x_k \leq 0$. Para $k > 6$ se cumple $x_k \leq 1$ (con igualdad sólo posible en el caso de x_{11}), de modo que

$$2\sum_{k=1}^{11}(k-6)x_k < 2\sum_{k=7}^{11}(k-6) = 2 \cdot (1+2+3+4+5) = 30$$

   Por lo tanto la suma de todas las distancias $x_i - x_j$ es menor que 30.

4. Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma. Halla la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas. *(OME Fase Local 2010)*

   Solución. Una forma de hacer una disposición en la que no haya dos hayas consecutivas puede ser imaginar plantados todos los robles y todas las encinas y colocar las cinco hayas entre los huecos y los extremos; tenemos pues ocho huecos para colocar las hayas. El problema puede plantearse con dos supuestos diferentes, aunque el resultado final es el mismo.

   - No es posible distinguir los robles entre sí, las encinas entre sí y las hayas entre sí. El número total de disposiciones es igual a las permutaciones con repetición de 12 elementos de los que 3, 4 y 5 son iguales entre sí; esto es $\frac{12!}{3!4!5!}$. El número de disposiciones favorables es igual a las combinaciones de 8 elementos tomados de 5 en 5 multiplicado por el número de permutaciones con repetición de 7 elementos de los que 3 y 4 son iguales entre sí. La probabilidad es:

$$p_1 = \frac{\frac{8!}{5!3!}\frac{7!}{3!4!}}{\frac{12!}{3!4!5!}} = \frac{7}{11 \cdot 9} = \frac{7}{99}$$

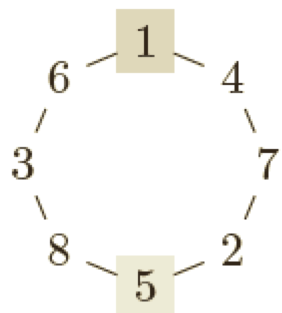
   - Es posibles distinguir entre los robles, encinas y hayas. En este caso el número total de disposiciones es 12!, y el de disposiciones favorables es el producto de 7!, la forma de colocar los robles y las encinas, por $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$, la forma de colocar las cinco hayas de forma que no haya dos hayas consecutivas. La probabilidad es:

$$p_2 = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4)(7!)}{12!} = \frac{7}{11 \cdot 9} = \frac{7}{99}$$

[1] Fuente: Heleen Neggers, *Un libro de ejercicios para la segunda ronda de la Olimpiada Matemática Holandesa*

5. Ponemos un caballo en una de las casillas situadas en las esquinas de un tablero de ajedrez 3×3. Un movimiento permitido consiste en mover el caballo dos casillas en horizontal y una en vertical, o bien dos en vertical y una en horizontal. ¿De cuántas maneras podemos llevar el caballo a la esquina opuesta a la de partida con exactamente 12 movimientos permitidos? *(Olimpiadi della Matematica 2014)*

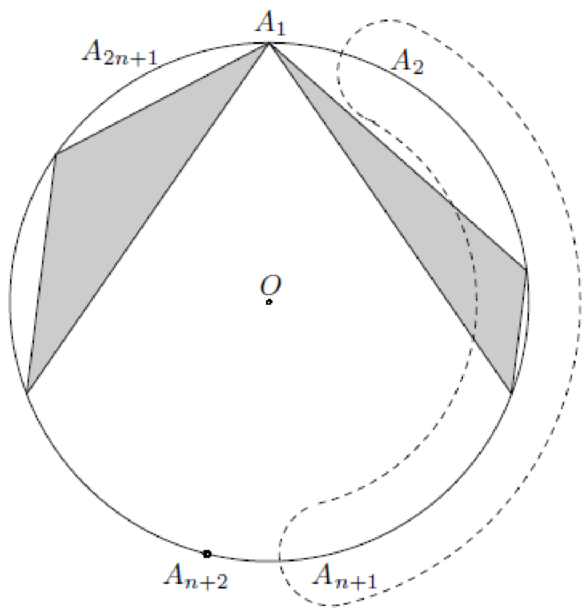
   Solución. La respuesta es 992. Observamos que el caballo se moverá siempre sobre casillas adyacentes al perímetro del tablero (todas menos la central) y que desde cada casilla sólo existen dos movimientos permitidos: uno que desplaza al caballo tres casillas en en sentido horario sobre el perímetro del tablero, y otro que lo desplaza tres casillas en sentido antihorario. Si se numeran las casillas del perímetro del tablero del 1 a 8 en sentido horario, donde la casilla 1 es aquella de la que partimos, los movimientos permitidos del caballo pueden representarse como en la siguiente figura: cada movimiento lleva al caballo del



   vértice del octógono correspondiente a la casilla en la que se encuentra a uno de los dos adyacentes, según sea en sentido horario o antihorario. Para llegar a la esquina opuesta, el caballo debe desplazarse un total de 4 posiciones sobre el octógono, más eventualmente un número entero de giros sobre el octógono (8 movimientos en sentido horario o antihorario devuelven al caballo a la casilla de partida). Sea x el número de movimientos efectuados en sentido horario, e y el número de movimientos efectuados en sentido antihorario, hemos de contar el número de recorridos posibles en los que $x+y = 12$ (se efectúan 12 movimientos en total) y $x-y$ es un número de la forma $8k+4$ con k entero. Las posibles parejas de soluciones con $x, y \leq 0$ son las siguientes: $x = 12, y = 0; x = 0, y = 12; x = 8, y = 4; x = 4, y = 8$. Las dos primeras parejas representan los dos recorridos en los que el caballo hace todos los movimientos en sentido horario o antihorario. Las otras dos parejas representan recorridos en los que se efectúan 8 movimientos en sentido horario y 4 en antihorario o viceversa; el número de tales recorridos viene dado por el número de formas en las que se puede escoger el orden de los movimientos; en particular, se trata de $\binom{12}{4}$ en ambos casos (entre los 12 movimientos a efectuar, del primero al duodécimo, se escogen los 4 que serán en sentido antihorario en el primer caso, u horario en el segundo).
   El total resulta ser $2 + 2\binom{12}{4} = 992$.

6. Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ son los vértices de un polígono regular de $2n+1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es obtusángulo. *(OME Fase Local 2012)*

   Solución. Al ser $2n+1$ impar, no es posible construir triángulos rectángulos. Observemos que cualquier triángulo obtusángulo dejará el centro O (su circuncentro) fuera de él. Si lo giramos en sentido directo o inverso alrededor de O podemos conseguir que uno de sus vértices agudos esté en $A1$. Los otros dos están, bien en el conjunto $\{A2, ..., An+1\}$, bien en $\{An+2, ..., A2n+1\}$. El número buscado será $2\binom{n}{2}$. Como esto lo podemos hacer con cada uno de los $2n+1$ vértices, quedarán $2(2n+1)\binom{n}{2}$ triángulos. Pero cada triángulo lo hemos contado dos veces, una para cada vértice agudo. Luego la solución buscada es $(2n+1)\binom{n}{2}$.



7. Saber cuál es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra? *(OME Fase Local 2011)*

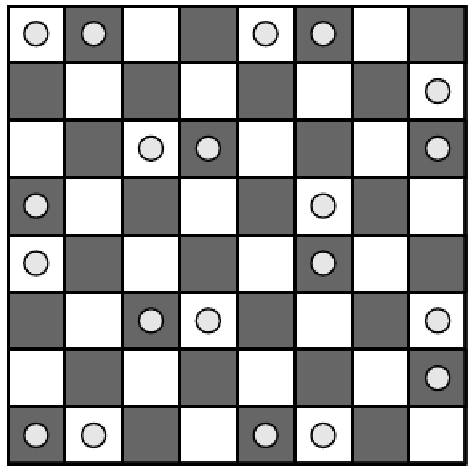
   Solución. Si $n \geq 1$, $2009^n = (2000+9)^n = 9^n + 2000k$ Por tanto las 3 últimas cifras de 2009^n coinciden con las de 9^n. Por el desarrollo del binomio de Newton:

$$9^{2011} = (10-1)^{2011} = (-1)^{2011} + \binom{2011}{1}(-1)^{2010} \cdot 10 + \binom{2011}{2}(-1)^{2009} \cdot 10^2 + K \cdot 10^3 =$$
$$= -202085391 + K \cdot 10^3 = 609 + K' \cdot 10^3$$

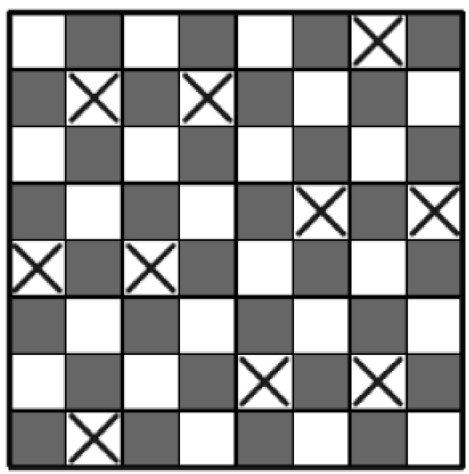
   Luego la respuesta es que 9 es la última cifra y le precede un único cero.

8. Sobre algunas de las casillas de un tablero de ajedrez 8×8 tenemos que colocar una serie de fichas de acuerdo a la siguiente regla: cada casilla, esté o no ocupada por una ficha, ha de tener como máximo una casilla vecina ocupada por una ficha. Encuentra el máximo número de fichas que podemos colocar sobre el tablero en estas condiciones. (Entendemos que dos casillas son vecinas la una de la otra cuando tienen un lado en común.) *(Deutsche Mathematik Olympiade 2014-2015)*

   Solución. La siguiente figura muestra una configuración de 20 fichas dispuestas en el tablero que cumplen las condiciones del enunciado.



Observamos además que toda casilla negra del tablero es vecina de al menos una de las 10 casillas blancas que hemos marcado con una cruz en la siguiente figura:



Así, aplicando el Principio del Palomar de Dirichlet, si colocáramos más de 10 fichas sobre casillas negras del tablero, por lo menos dos de dichas casillas serían vecinas de la misma casilla blanca, lo que no está permitido por las condiciones que nos impone el enunciado. Del mismo modo probamos que como máximo podemos colocar un total de 10 fichas sobre casillas blancas, de modo que el número máximo de fichas no puede ser superior a $10+10 = 20$. Como hemos dado al principio una configuración válida que emplea precisamente 20 fichas, se demuestra que el número máximo que buscamos es exactamente 20.

9. Sean x y n enteros tales que $1 \leq x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Sea p un número primo. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in \{1,2,\dots,n-1\}$. *(OME Fase Nacional 2012)*

Solución. Claramente $f(n,x)$ es el número de combinaciones con repetición de $x+1$ elementos tomados de $n-x$ en $n-x$. Es decir,

$$f(n,x) = CR(x+1, n-x) = \binom{(x+1)+(n-x)-1}{n-x} = \binom{n}{x}$$

Vamos a probar que los n buscados son todos los de la forma p^a con a entero positivo. Sea m_p la p-parte del entero positivo m, es decir si $m = p^a q$ (con $q \geq 1$ entero), $m_p = p^a$ siendo a entero. Ahora probaremos el siguiente resultado previo:

Si $m_p = p^a$ entonces $(m-i)_p = i_p$ para cada $i \in \{1, 2, ..., p^a - 1\}$.

En efecto, si $i_p = p^k$ entonces $k < a$ y es obvio que $p^k | (m-i)$, luego $i_p \leq (m-i)_p$.
Recíprocamente, si $(m-i)_p = p^k$ ha de ser $k < a$ porque si no sería $p^a | i$. Ahora, $p^k | i$ porque $p^k | m$ y $p^k | (m-i)$. Es decir $(m-i)_p \leq i_p$.
A continuación probaremos que si p es primo y n un entero mayor que 1, entonces p divide a $\binom{n}{x}$ para todo $x \in \{1, 2, ..., n-1\}$ si y sólo si a $n = p^a$ con a entero. Si p divide a $\binom{n}{x}$ para todo $x \in \{1, 2, ..., n-1\}$, divide a $\binom{n}{1} = n$. Poniendo $n_p = p^a$ se tiene:

$$\binom{n}{p^a} = \frac{n(n-1)\dots(n-p^a+1)}{p^a(p^a-1)\dots 2 \cdot 1}$$

y por el resultado previo concluimos que la p-parte de $\binom{n}{p^a}$ es 1, luego $n = p^a$. Recíprocamente, si $n = p^a$, para cada $x \in \{1, 2, ..., p^a - 1\}$,

$$\binom{n}{x} = \frac{p^a(p^a-1)\dots(p^a-x+1)}{x(x-1)\dots 2 \cdot 1}$$

y de nuevo por el resultado previo, la p-parte de $\binom{n}{x}$ es $\dfrac{p^a}{x_p}$, que es múltiplo de p por ser $x < p^a$.