Preparación para la LI Olimpiada Matemática Española (II)

Adrián Franco Rubio

7 de noviembre de 2014

1. En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar? *(OME Fase Local 2002)*

2. En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$. *(OME Fase Local 2011)*

3. Sean $P_1, \ldots, P_{11}$ once puntos distintos sobre una recta. Para cada par de ellos la distancia que los separa es menor que 1. Demuestra que la suma de todas las distancias P_iP_j es menor que 30. *(Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993)*

4. Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma. Halla la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas. *(OME Fase Local 2010)*

5. Ponemos un caballo en una de las casillas situadas en las esquinas de un tablero de ajedrez 3×3. Un movimiento permitido consiste en mover el caballo dos casillas en horizontal y una en vertical, o bien dos en vertical y una en horizontal. ¿De cuántas maneras podemos llevar el caballo a la esquina opuesta a la de partida con exactamente 12 movimientos permitidos? *(Olimpiadi della Matematica 2014)*

6. Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ son los vértices de un polígono regular de $2n+1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es obtusángulo. *(OME Fase Local 2012)*

7. Saber cuál es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra? *(OME Fase Local 2011)*

8. Sobre algunas de las casillas de un tablero de ajedrez 8×8 tenemos que colocar fichas de acuerdo a la siguiente regla: cada casilla, esté o no ocupada, ha de tener como máximo una casilla vecina ocupada. Encuentra el máximo número de fichas que podemos colocar sobre el tablero en estas condiciones. (Entendemos que dos casilla son vecinas la una de la otra cuando tienen un lado en común.) *(Deutsche Mathematik Olympiade 2014-2015)*

9. Sean x y n enteros tales que $1 \leq x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Sea p un número primo. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. *(OME Fase Nacional 2012)*