SOLUCIONES

1. El número 2^{29} tiene 9 dígitos distintos. Sin usar calculadora, hallar el dígito omitido.

   Solución:

   Sabemos que un número es congruente con la suma de sus dígitos módulo 9. Notar que $0+1+2+\cdots+9=45$, que es divisible por 9. Por otra parte,
   $$2^{29}=2^{3\cdot 9+2}\equiv(-1)^9 2^2\equiv -4 \pmod 9.$$
   Por tanto, el dígito omitido es 4.

   Nota. $2^{29}=536870912$

2. Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

   (Fase Local 2007)

   Solución:

   Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores.

   Puesto que cada vértice ha de estar exactamente en una cara cuadrada, debe haber V=4·12=48 vértices. (Se obtendría el mismo resultado haciendo la cuenta con los hexágonos o los octógonos).

   Como de cada vértice salen exactamente 3 aristas, hay A=3V/2=72 aristas.

   Cada cuadrado tiene 2 diagonales, cada hexágono 9 y cada octógono 20(d=n(n-3)/2), por tanto D=12·2+8·9+6·20=216 diagonales sobre las caras.

   Así, el número pedido I será igual al total de pares que se puedan formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, y restando las aristas y las diagonales sobre las caras. I=$\binom{48}{2} - A - D = 840$.

3. Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todo nueves (Por ejemplo, si p=13, 999999=13·76923)

   (OME 2003)

   Solución:

   Sea a_i el número formado por i nueves. Supongamos que existe un primo p tal que p no divide a_i para ningún entero i.

   Consideremos el conjunto de número $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$, sabemos que no hay ningún $a_i \equiv 0(mod\ p)$. Por tanto, al haber p números en el conjunto y sólo p-1 restos posibles módulo p, se sabe que existen m,n tales que $a_m - a_n \equiv 0(mod\ p)$

   Suponemos sin pérdida de generalidad que m>n y tenemos que $p|a_m - a_n = a_{m-n}10^n$

   Como p$\neq$ 2 y p$\neq$ 5 tenemos que p no divide a 10^n, por lo tanto p divide a a_{m-n} y como a_{m-n} pertenece al conjunto escogido por ser $1 \leq m - n \leq n$ se ha llegado a una contradicción y el enunciado queda probado

4. Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que, al menos el producto de dos de estos números es un cuadrado perfecto. (Fase Local 2008)

   Solución:
   Todos estos números se pueden descomponer en factores primos $2^a3^b5^c7^d$, donde a,b,c,d son enteros no negativos.
   Si dos números de este tipo se multiplican, es decir $2^a3^b5^c7^d$ y $2^{a'}3^{b'}5^{c'}7^{d'}$ se multiplican, su producto es $2^{a+a'}3^{b+b'}5^{c+c'}7^{d+d'}$ y si los cuatro exponentes $a + a', b + b', c + c', d + d'$son pares el producto es un cuadrado perfecto.
   Para que esto ocurra las dos cuaternas (a, b, c, d)y (a', b', c', d')han de tener la misma paridad. Como cada número a,b,c,d puedes ser par o impar, hay un total de 16 cuaternas con distinta paridad entre sí. Al tener 17 números, y por tanto 17 cuaternas, por el principio del palomar dos deben tener igual paridad y entonces su producto es un cuadrado perfecto.

5. (Fase Local, OME 2011) Calcula todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$.

   Solución:

   Sea (a, b, c) una solución distinta de (0, 0, 0), con $|a| + |b| + |c|$ mínimo. Tomando la igualdad módulo 3, tenemos $a^2 = 2b^2$ módulo 3. Como a^2 y b^2 sólo pueden ser congruentes con 1 o 0, se deduce que a y b son múltiplos de 3. Por tanto, $3c^2$ es múltiplo de 9, así que c también es múltiplo de 3. Pero entonces, (a/3, b/3, c/3) sería otra solución con $|a/3|+|b/3|+|c/3| < |a|+|b|+|c|$, lo que contradice la hipótesis supuesta.

6. Probar que 1982 divide a 222.....22 (1980 doses)

   Solución:

   Dividiendo por dos, obtenemos que lo que tenemos que probar es que 991|111...11 (1980 unos).

   Pero, tenemos que $111...11=(10^{1980}\text{-}1)/9$. Además, tenemos que $(10^{1980}\text{-}1)=(10^{990}\text{-}1)(10^{990}+1)$. Como 991 es primo, por el teorema de Fermat tenemos que $991|(10^{990}\text{-}1)$ lo que prueba el resultado.

7. Demostrar que $5555^{2222} + 2222^{5555}$ es múltiplo de 7.

   Solución:

   Vemos que tomando módulo 7, $5555 \equiv 4$ y $2222 \equiv 3$. Además, $4^3 \equiv 1$ y $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Luego

   $5555^{2222}+2222^{5555} \equiv 4^{2222}+3^{5555} \equiv 4^{3\cdot 740+2}+3^{6\cdot 925+5} \equiv 4^2+3^5 \equiv 0 \pmod 7$.

8. En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza que independientemente de cuales sean los n segmentos elegidos y de como de haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color. (OME 2011)

Solución:

Veamos en primer lugar que con n=2010 no es suficiente.
Diremos que un segmento es de tamaño r, si une dos vértices entre los que siguiendo el camino más corto por los lados del polígono hay otros r-1 vértices. Elegimos los 2010 segmentos de tamaño mayor que 3 (De tamaño mayor que 3 hay $60 \cdot 67/2=2010$ segmentos exactamente). Para cada r entre 1 y 10 asignamos el color r a los segmentos de tamaño 3r+1,3r+2,3r+3 (notar que el tamaño máximo es 33). Es claro que cada vértice pertenece a 6 segmentos de cada color.
Ahora probaremos que si n=2011 hay algún vértice que está en 7 segmentos del mismo color. En los 2011 segmentos intervienen contando repeticiones 4022 vértices, luego por el principio del palomar como $4022 > 60 \cdot 67$, algún vértice interviene en al menos 61 segmentos, de los cuales de nuevo por el principio del palomar al menos 7 serán del mismo color.

9. Encontrar todos los números enteros postivos n tales que 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$:

(Fase Local 2005)

Solución:

Para un n como el pedido, tenemos que

$3(3^{n-1}+5^{n-1})<3^n+5^n<5(3^{n-1}+5^{n-1})$

Por tanto se verifica que $3^n+5^n=4(3^{n-1}+5^{n-1})$

Lo cual se reduce a $5^{n-1}=3^{n-1}$ que implica n=1. Así, n=1 es la única solución.