Preparación para la Olimpiada Matemática Española (IV)

Adrián Franco Rubio

13 de diciembre de 2013

1. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números enteros tales que cada uno de ellos se puede poner como suma de dos cuadrados perfectos. Demostrar que su producto $x_1x_2...x_n$ también puede escribirse como suma de dos cuadrados perfectos.

(53. Deutsche Mathematik-Olympiade, 2013)

2. En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm.

(OME, fase local 2013)

3. Demostrar que la ecuación

$$x(x+2) = y(y+1)$$

no tiene soluciones enteras con $x, y > 0$.

(Olympiade Française de Mathématiques 2012-2013, Envoi 3)

4. Encontrar todas las soluciones reales (x, y) del sistema

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$x^2y + xy^2 = -2$$

(OME, fase local 2006)

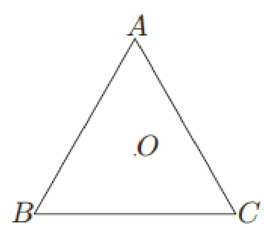
5. Dos circunferencias S y T son tangentes en el punto X. Una recta es tangente común a ambas en los puntos A y B respectivamente (A y B son distintos). Sea AP un diámetro de S. Demostrar que los puntos B, X, y P están alineados.

(British Mathematical Olympiad 2012-2013, Round 1)

6. Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

(OME, fase local 2012)

7. Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O. Un rayo parte



de O y se refleja en los tres lados, AB, AC y BC, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A. Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.
Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

(OME, fase local 2010)

8. Resuelve esta ecuación exponencial:

$$2^x 3^{5^x} + \frac{3^{5^{-x}}}{2^x} = 6$$

(OME, fase local 2013)

9. Dado un número natural n mayor que 1, hallar todos los pares de números enteros a y b, tales que las dos ecuaciones $x^n + ax - 2008 = 0$ y $x^n + bx - 2009 = 0$ tengan, al menos, una raíz común real.

(OME, fase local 2008)