Preparación para la Olimpiada Matemática Española

1. Fase Local 2005-2006

Problema 1. *En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 720 llaves.*

Problema 2. *Determinar todos los enteros n tales que*

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

es entero.

Problema 3. *Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encontrar la relación existente entre R y r.*

Problema 4. *Calcular los números p y q tales que las raíces de la ecuación*

$$x^2+px+q=0$$

sean D y $1-D$, siendo D el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

Problema 5. *Los números naturales 22,23 y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares:*

$$22=2^1\cdot 11^1;\quad 23=23^1;\quad 24=2^3\cdot 3^1.$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad? Razónese la contestación.

Problema 6. *Los vértices del cuadrilátero convexo $ABCD$ están situados en una circunferencia. Sus diagonales AC y BD se cortan en el punto E. Sea O_1 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABC, y O_2 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABD. La recta O_1O_2 corta a EB en M y a EA en N. Demostrar que el triángulo EMN es isósceles.*

2. Problemas de Geometría

Problema 7. *Demostrar que en un triángulo la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice. (Fase Local 2007)*

Problema 8. *ABC es un triángulo isósceles con AB=AC. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$. (OME 2006)*

Problema 9. *Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple*

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc.$$

(OME 2007)