Soluciones a los problemas de preparación para la XLIX Olimpiada Matemática Española

Abel Naya Forcano y Adrián Franco Rubio

23 de Noviembre de 2012

1. Se esparce una cierta cantidad de pintura negra sobre el suelo blanco de una habitación cuadrada de dimensiones 2x2 metros. Demostrar que hay dos puntos del mismo color cuya separación es exactamente un metro.

(Dossiers de l'Olympiade Française de Mathématiques)

Solución. Considérese un triángulo equilátero de lado un metro en el suelo de dicha habitación (nótese que por las dimensiones de la misma cabe sin problemas). Los tres vértices del triángulo están separados dos a dos exactamente un metro. Por el Principio del Palomar, al menos dos de estos tres puntos son del mismo color (pues sólo hay dos colores posibles), luego efectivamente podemos encontrar dos puntos del mismo color separados exactamente un metro.

2. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.

(Fase Local 2008)

Solución. Supongamos que haya 31 comités. Entonces hay, al menos, $315 = 155$ asientos en estos 31 comités. Como sólo hay 25 miembros, uno de ellos tendrá que ocupar, al menos, 7 de los 155 asientos (155/25=6,2). Consideremos este miembro A y 7 de los comités donde se sienta. Hay otros $28(7 \cdot 4)$ asientos en estos 7 comités. Pero como sólo hay 24 miembros más, uno de ellos tendrá que ocupar, al menos, 2 de esos asientos. En consecuencia, este miembro y A deberían estar juntos en, al menos, 2 comités, lo que contradice las condiciones del enunciado. Luego no puede haber más de 30 comités.

3. Dado un entero $k \geq 1$, definimos a_k como el número entero que en base

diez se escribe:

$$a_k = \overbrace{11\ldots1}^{k}$$

Demostrar que a_k divide a a_l si y sólo si k divide a l.

(Fase Local 2007).

Solución. Si $l = dk + r$ donde r es más pequeño que k, entonces

$$a_l = a_k 10^r(1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{(d-1)k}) + a_r$$

(Pondremos $a_0 = 0$.) Si k divide a l será $r = 0$ y es evidente que $a_r = 0$ de forma que a_k divide a a_l.
Recíprocamente, si a_k divide a a_l entonces debe ser $a_r = 0$ y por tanto $r = 0$.
Dicho de otro modo, hemos encontrado una expresión del resto de la división de a_l entre a_k en función del resto de la división de l entre k: si éste es r, aquél resulta ser a_r, y vemos que el uno es cero si y sólo si lo es el otro.

4. Escribo en la pizarra 14 números enteros, no necesariamente distintos, que verifican la propiedad de que al borrar cualquiera de ellos, puedo agrupar los trece restantes en tres montones de igual suma.
a) Demuestra que cada uno de los catorce es múltiplo de 3.
b) ¿Es posible que alguno de los catorce que he escrito no sea el 0?

(Fase Local 2002)

Solución. Sean $a_1, a_2, a_3, ..., a_{14}$ los números que he escrito y

$$S = \sum_{i=1}^{14} a_i$$

a) Me dicen que para cada i, $S - a_i = 3b_i$; siendo b_i la suma de cada montón obtenido al quitar a_i. Así pues:

$$S - a_1 = 3b_1$$

$$S - a_2 = 3b_2$$

$$\ldots$$

$$S - a_{14} = 3b_{14}$$

Sumando estas igualdades, llegamos a $14S - S = 3(b_1 + b_2 + ... + b_{14}) \Rightarrow 13S = 3T \Rightarrow T|13S$ y como 13 es primo, $T|S$, así que $S = 3c$ con c entero. Escribiendo ahora $S - a_i = 3b_i$; como $3c = a_i - 3b_i$, se sigue que cada a_i es múltiplo de 3.

b) Hemos probado que cada $\frac{a_i}{3}$ es un número entero, llamémosle d_i. Trabajemos ahora con estos nuevos catorce enteros.

$$\frac{S}{3} = \sum_{i=1}^{14} d_i$$

Es fácil comprobar que de nuevo estos catorce números cumplen la propiedad de que, al quitar uno, se pueden agrupar los otros trece en tres montones de igual suma, con lo que cada d_i es múltiplo de 3 (siguiendo el argumento de a). Esto nos lleva, reiterando este proceso,a que para cada $k \in \mathbb{N}, \frac{a_i}{3^k}$ es múltiplo de 3, con lo que la única salida es que $a_i = 0$ para cada i, de donde no es posible que algún a_i no sea 0.

5. Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determínense las dos últimas cifras de a_{2000}.

(Fase Local 2000)

Solución. Se tiene $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n(1 + a_n)$. Escribimos los primeros términos de la sucesión:

$$3, 12, 156, 156157 = 24492, 2449224493 = ...,56, \qquad ....,92$$

Supongamos que a_n termina en 56. Entonces, $a_n = 100a + 56$, y tenemos

$$a_{n+1} = (100a + 56)(100a + 57) = 100b + 5657 = 100b + 100c + 92 = 100d + 92,$$

es decir, las últimas cifras de a_{n+1} son 92. Análogamente, si a_n termina en 92, se prueba que a_{n+1} termina en 56. Como 2000 es par, entonces a_{2000} termina en 92.

6. Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n.

(OME 2012).

Solución. Nótese que la división de un número cuadrado perfecto por 4 sólo puede arrojar resto 0 o 1. En efecto, si m es par, $m = 2k \Rightarrow m^2 = 4k^2$, que es múltiplo de 4; si m es impar, $m = 2k + 1 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 4k + 1$, que es un múltiplo de 4 más 1. Veamos ahora qué ocurre con la expresión de $3n^2 + 2n + 2$. Si n es par, $3n^2 + 2n$ es múltiplo de 4, y por ende $3n^2 + 2n + 2$ es par pero no múltiplo de 4 (da resto 2), de donde se sigue que no puede ser un cuadrado perfecto. Si n es impar, n^2 da resto 1 al dividirlo por 4, por ello $3n^2$ da resto 3, y $2n + 2$ es múltiplo de 4, luego $3n^2 + 2n + 2$ da resto 3, y tampoco puede ser un cuadrado perfecto. Por lo tanto, λ_n es irracional para todo entero n, positivo o negativo (nótese que $3n^2 + 2n + 2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ de modo que λ_n es siempre real).

7. Encontrar todos los pares (p, q) de números primos tales que

$$p^q + q^p$$

es también un número primo.

(Deutsche Mathematik-Olympiade 2011/2012)

Solución. Está claro que si p y q son números primos, $p^q + q^p \geq 2^2 + 2^2 = 8$. Eso nos permite descartar que $p^q + q^p$ sea igual a 2, y por lo tanto, si es primo, es impar. Consecuentemente, los dos sumandos han de tener paridad distinta, lo que significa que p y q tienen paridad distinta, y por ende uno de ellos es el 2. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p = 2$, y examinemos $2^q + q^2$. Se cumple que las potencias impares de 2 dan resto 2 al dividirlas por 3, pues $2^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \equiv 2(mod 3)$. Ahora bien, si q no es divisible por 3, entonces $q^2 \equiv 1(mod 3)$, como se comprueba examinando los dos posibles casos ($q \equiv 1$ o bien $q \equiv 2(mod 3)$). Juntando ambas cosas tendríamos que $2^q + q^2$ es divisible por 3, y mayor que 8, de modo que no puede ser primo. Sólo nos queda entonces que q sea divisible por 3, lo que, como q es primo, implica $q = 3$, y obtenemos la única solución al problema:

$$2^3 + 3^2 = 17$$

8. Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas n esferas. Calcular, en función de n, el número total de puntos de tangencia (contactos) entre las esferas del montón.

(Fase Local 2011/2012)

Solución. Analicemos primero el problema en el caso del plano. Sea A_n el número de contactos entre las esferas colocadas en un triángulo plano con n esferas en cada uno de los lados. Fijémonos que el número total de esferas es, evidentemente, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Podemos proceder por inducción. Si hay $n = 2$ filas el número de contactos es 3; es decir, $A_2 = 3$. Observemos que coincide con el número de bolas del triángulo de dos filas. En un triángulo de $n - 1$ filas hay A_{n-1} contactos. Obviamente, en un triángulo de n filas se darán los contactos que ya había en un triángulo de $n - 1$ filas, más los que provengan de añadir la última fila. Pero está claro que,

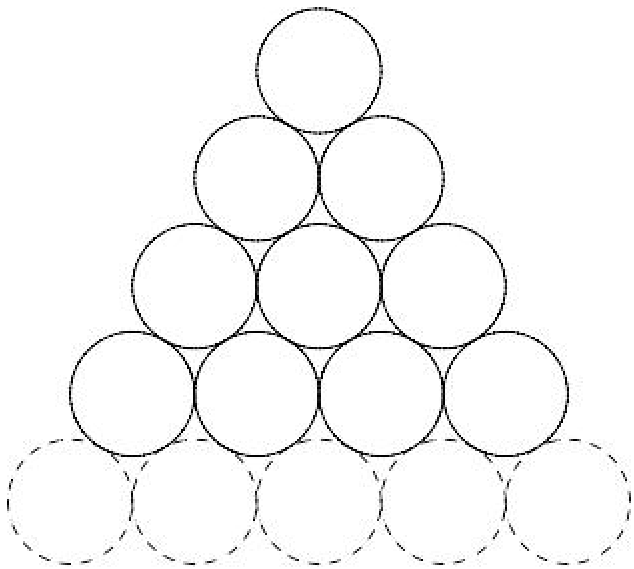

Figura 1: El problema en el plano

al añadir esta última fila se producen contactos de dos tipos:

- Los que hay entre las bolas de la fila n-ésima, que son $n-1$.
- Los que tienen las bolas de la fila n-ésima con la anterior. Son $2(n-1)$.

Así pues, $A_n = A_{n-1} + 3(n-1)$, o bien, $A_n - A_{n-1} = 3(n-1)$. Sumando queda

$$A_n = 3((n-1) + (n-2) + \ldots + 1) = 3T_{n-1}$$

Ahora ya podemos analizar el caso en el espacio. Sea C_n el número de contactos de un montón tetraédrico de esferas con aristas de n esferas. Cuando añadimos el piso n-ésimo, incluimos contactos de dos tipos:

- Los propios del piso - un triángulo plano de n bolas de lado.
- Los que provienen de contactos entre el piso $n-1$ y el piso n.

Los contactos del primer tipo son, como hemos visto en el caso del plano, $A_n = 3T_{n-1}$. El número de contactos entre un piso y el anterior es $3T_{n-1}$, ya que cada bola del piso $n-1$ toca exactamente tres bolas del piso n. En total, pues, el número de contactos es $C_n - C_{n-1} = A_n + 3T_{n-1} = 3n(n-1)$. Si sumamos queda

$$C_n - C_2 = 3(n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 3^2) - 3(n + (n-1) + \ldots + 3)$$

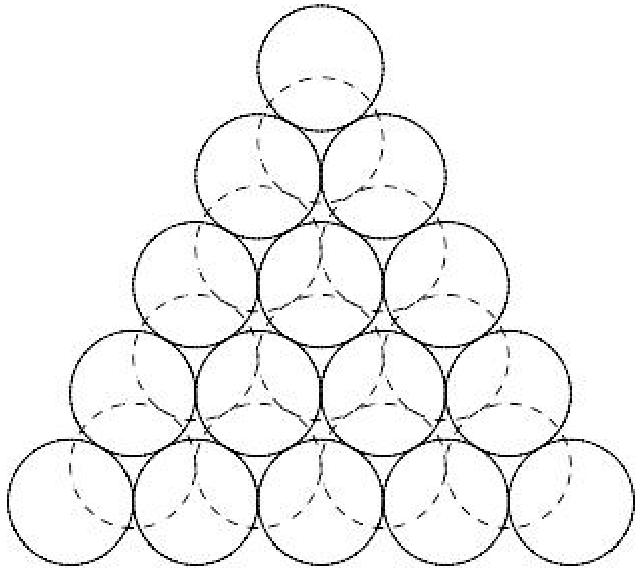

Figura 2: El problema en el espacio. Esferas de la base en línea continua, y del piso inmediatamente superior en discontinua.

o bien

$$C_n = 3(n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2) - 3(n + (n-1) + \ldots + 2 + 1) =$$

$$= 3\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = n^3 - n.$$

Otro camino: La recurrencia $C_n - C_{n-1} = 3n(n-1)$ se puede resolver escribiendo C_n como un polinomio cúbico y calculando sus coeficientes a partir de la recurrencia y de la condición inicial $C_1 = 0$. Si ponemos $C_n = an(n-1)(n-2) + bn(n-1) + cn + d$, la condición de recurrencia da $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, y la condición $C_1 = 0$ da $d = 0$. En resumen

$$C_n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = n^3 - n$$

9. Inicialmente hay m bolas en una bolsa, y n en otra, donde $m, n > 0$. Se permiten dos operaciones distintas:
a) Retirar un número igual de bolas de cada bolsa.
b) Duplicar el número de bolas en una de las bolsas.
¿Es siempre posible vaciar ambas bolsas tras una secuencia finita de operaciones?
Ahora reemplazamos la operación b) por la siguiente:

b') Triplicar el número de bolas en una bolsa.
¿Es ahora siempre posible vaciar ambas bolsas tras una secuencia finita de operaciones?

(British Mathematical Olympiad, 2011/2012)

Solución. Probaremos por inducción que en el primer caso siempre es posible vaciar ambas bolsas. Llamaremos a partir de ahora *situación*, y lo denotaremos como un par (m, n) al estado de las bolsas (el número de bolas en cada una) en un momento dado. Diremos que una situación es *resoluble* si empleando las operaciones permitidas podemos llegar desde ella a la situación $(0, 0)$, es decir, podemos vaciar ambas bolsas. Como paso previo, nótese que toda situación del tipo (m, m) es trivialmente resoluble aplicando la operación a) una vez. Si $n \neq m$ entonces podemos conseguir que en una de las bolsas quede sólo una bola. En efecto, suponiendo sin pérdida de generalidad que $m < n$, retiramos $m-1$ bolas de cada bolsa y llegamos de la situación (m, n) a una del tipo $(1, x)$, en concreto a $(1, n-m+1)$. Si $m > n$, llegaremos de forma similar a una situación del estilo $(x, 1)$. Es fácil ver que si una situación es resoluble, la que resulta de intercambiar las bolsas lo es también, pues las operaciones no distingues entre ellas. Así que de ahora en adelante trabajaremos sin pérdida de generalidad con las situaciones $(1, x)$. Si probamos que este tipo de situaciones siempre son resolubles, entonces todas las situaciones lo serán. Obsérvese en primer lugar que las situaciones $(1, 1)$ y $(1, 2)$ son resolubles, haciendo

$$(1,1) \xrightarrow{a} (0,0) \qquad (1,2) \xrightarrow{b} (2,2) \xrightarrow{a} (0,0)$$

Supongamos ahora que todas las situaciones $(1, x)$ con $x \leq 2^k$ son resolubles. Veamos que entonces también lo son todas las situaciones $(1, x)$ con $x \leq 2^{k+1}$. En efecto, tomemos una situación $(1, x)$ cualquiera con $x \leq 2^{k+1}$. Si $x \leq 2^k$, por hipótesis de inducción, $(1, x)$ es resoluble. Tomemos entonces $2^k < x \leq 2^{k+1}$. Aplicando sucesivamente la operación b) podemos conseguir que en la bolsa donde había una bola pase a haber 2^{k+1} bolas:

$$(1,x) \xrightarrow{b} (2,x) \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} (2^{k+1}, x)$$

Si ahora queremos volver a dejar una sola bola en una de las bolsas, aplicamos a):

$$(2^{k+1}, x) \xrightarrow{a} (2^{k+1} - x + 1, 1) = (x', 1)$$

y como $x > 2^k$, $x' = 2^{k+1} - x + 1 < 2^{k+1} - 2^k + 1 = 2^k + 1 \Longrightarrow x' \leq 2^k$, y por hipótesis de inducción hemos llegado a una situación resoluble. En consecuencia, hemos probado que toda situación $(1, x)$ con $x \leq 2^{k+1}$ es resoluble. Como hemos probado el caso base $k = 1$, por inducción se sigue que con las operaciones a) y b) toda situación es resoluble y damos respuesta afirmativa a la primera pregunta.
Veamos ahora que la respuesta a la segunda pregunta es no. Para ello demostramos que la paridad del número total de bolas en ambas bolsas es un invariante. En efecto, sea $T = m + n$.

- Si, aplicando a), retiramos p bolas de cada bolsa, el total de bolas pasará a ser $T' = T - 2p$, que tiene la misma paridad que T.

- Si, aplicando b)́, triplicamos el número de bolas en una bolsa, por ejemplo en la que tenía m, el total del bolas pasará a ser $T' = 3m + n = T + 2m$, que de nuevo tiene la misma paridad que T.

Como en la situación de ambas bolsas vacías, $T = 0$ es par, concluimos que no será resoluble, con las nuevas operaciones, ninguna situación en la que el número total inicial de bolas sea impar, pues éste continuará siendo impar tras cada operación, y nunca podrá llegar a ser 0.