El problema de "doblar y un solo corte".

Eva Elduque Laburta

22 de marzo de 2013

§1. Introducción

Muchos de nosotros habremos jugado de pequeños a lo siguiente: coger una hoja de papel, hacerle unos cuantos dobleces de forma que el papel doblado quede plano, darle unos cuantos tijeretazos, y desdoblar el papel para ver qué figura nos ha quedado.

¿Qué habría pasado si sólo se nos hubiera permitido hacer un corte recto? Está claro que, al ser recto el corte, los lados de las figuras resultantes iban a ser segmentos rectilíneos. Pero, dentro de todos los dibujos que se pueden hacer con trazos rectos, ¿cuáles de ellos se pueden obtener al doblar un papel y efectuar un solo corte recto? La respuesta es sorprendente: TODOS.

Si lo enunciamos más formalmente, el resultado es el siguiente:

Teorema. *Cualquier dibujo compuesto de segmentos rectos en una hoja de papel puede ser doblado plano de modo que un corte recto que lo atraviese completamente corte todos los segmentos del dibujo y nada más.*

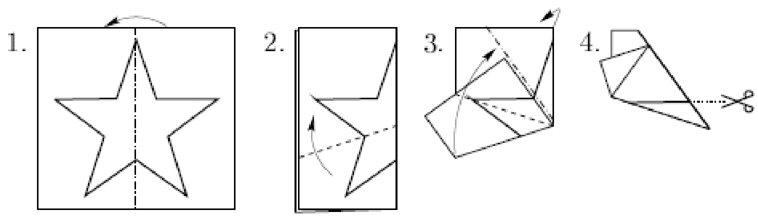


Figura 1: Modo de doblar un cuadrado de papel de forma que podamos recortar una estrella de cinco puntas con un solo corte. Imagen sacada de [3].

El teorema nos dice que cualquier dibujo compuesto por segmentos rectilíneos en un papel se puede doblar plano de forma que todos los segmentos del dibujo se encuentren alineados y nada más esté en esa línea, que llamaremos línea de corte. No obstante, tenemos que puntualizar algo sobre la manera en la que podemos efectuar el corte por dicha línea. Los segmentos del dibujo dividen el folio en distintas regiones, que llamamos caras. Para que el corte pueda hacerse con tijeras es necesario que dos caras adyacentes cualesquiera queden situadas una encima y otra debajo de la línea de corte, y eso podrá suceder en los dibujos en los que podamos colorear todas las caras con dos colores de forma que dos caras adyacentes cualesquiera tengan colores diferentes (un color representará estar encima de la línea de corte y otro debajo). Por ejemplo, todos los dibujos formados por polígonos disjuntos cumplen esta condición. Si no ocurriera esto, habría que cortar justo por un doblez, que es algo que no se puede hacer en la práctica a no ser que tengamos un láser muy preciso. Por tanto, en este artículo nos centraremos en los dibujos que podemos recortar con tijeras. Es más, salvo algún ejemplo puntual, tendremos en cuenta sólo dibujos formados por polígonos disjuntos, porque para recortar siluetas en un papel es el único caso que importa.

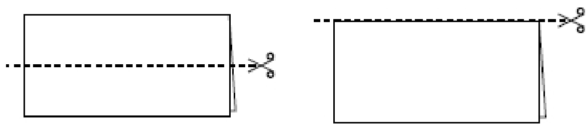


Figura 2: El primer corte se puede hacer con unas tijeras, el segundo no. Imagen sacada de [3].

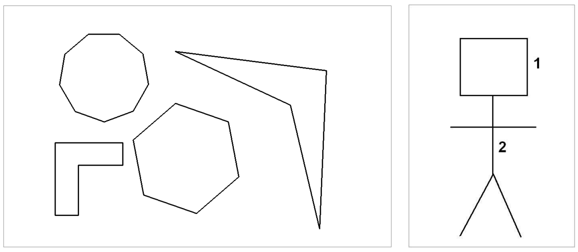


Figura 3: El primer dibujo es recortable con un solo tijeretazo tras doblarlo adecuadamente. Con el segundo habría que usar un láser. La arista 1 delimita dos caras que pueden ser coloreadas con colores distintos, sin embargo, la arista 2 tiene la misma cara a ambos lados (es adyacente consigo misma), por lo que este dibujo no se puede colorear con dos colores.

Si tenemos en cuenta que uno puede aproximarse a un dibujo dado todo lo que quiera con polígonos, el resultado viene a decir que (casi) se puede recortar cualquier cosa con un solo tijeretazo.

La primera publicación que se conoce que hace referencia a este problema data de 1721. Es un libro japonés escrito por Kan Chu Sen, en el que aparece un problema que pide doblar y cortar con un solo corte un emblema típico japonés llamado sangaibisi. Doblar y cortar también se ha usado como un truco de magia. Houdini, antes de ser un famoso escapista, describió en su libro *Paper Magic* de 1922 un método para recortar una estrella de cinco puntas similar al de la Figura 1, y el libro *Paper Capers* de Gerald Loe, otro mago, trata sobre la multitud de formas que éste podía doblar y cortar. En 1960, Martin Gardner fue el primero que expuso el problema de doblar y un solo corte como un problema abierto y escribió en su columna *Juegos Matemáticos* de la revista *Scientific American* sobre esto, impresionado por la habilidad de Loe para doblar y cortar cualquier letra del alfabeto.

Hay dos métodos para abordar este problema. Uno se basa en el esqueleto del dibujo, y otro es el método de empaquetamiento de discos (diremos más adelante lo que son cada uno). El primero es un método intuitivo y práctico, con el que se pueden doblar y cortar muchas figuras de una forma sencilla. Desgraciadamente, este método no cubre todos los dibujos que se pueden hacer con trazos rectos, aunque es muy difícil encontrarse con uno que no (ya explicaremos en qué sentido). El segundo tiene una gran importancia teórica, ya que demuestra el teorema, pero en la práctica es inviable.

El método del esqueleto fue descubierto por Erik Demaine (con 17 años), Martin Demaine y Anna Lubiw, y presentado en 1998 [3]. La demostración, como ya hemos dicho, no cubre todos los dibujos posibles, pero de eso se dieron cuenta más tarde. Posteriormente, Erik Demaine, junto con otros tres investigadores, Marshall Bern, David Eppstein y Barry Hayes, desarrollaron el método del empaquetamiento de discos, presentado en 2002. Esta prueba tenía un fallo, que fue descubierto por Bern y Hayes, pero fue reparado por ellos mismos en una conferencia que dieron en 2008 e, independientemente, por Erik Demaine y Joseph O'Rourke en [2].

En esta sesión explicaremos cómo doblar y cortar usando el método del esqueleto, y diremos en qué casos falla. La demostración de por qué funciona este método es bastante complicada y se escapa del objetivo de esta clase. También daremos una idea del método de empaquetamiento de discos y por qué es tan difícil ponerlo en práctica.

§2. Método del esqueleto.

Queda claro que el problema consiste en encontrar una forma de doblar nuestro papel plano de manera que todas las aristas de nuestro dibujo (por donde queremos recortar) queden alineadas, y sólo ellas estén en esa línea (para no cortar cosas que no queremos). Para empezar a abordar este problema con el método del esqueleto, debemos trazar primero en nuestro papel el esqueleto de la figura, y luego unos segmentos que llamaremos perpendiculares, ya que vamos a doblar nuestro papel a lo largo de estas dos construcciones. Las perpendiculares dividirán nuestro papel en regiones con buenas propiedades que llamaremos "pasillos". Una vez hayamos descrito cómo hacer estas construcciones auxiliares diremos cómo doblar el papel de una forma adecuada.

En primer lugar, introducimos algo de notación. Llamaremos **grafo de corte** al conjunto de aristas y vértices del dibujo por donde queremos recortar, a los que llamaremos **aristas de corte** y **vértices de corte** respectivamente. Esto definirá **caras (de corte)** en nuestro papel, que serán las regiones delimitadas por aristas de corte.

Construcción del esqueleto

El esqueleto es una construcción que generaliza el concepto de bisectriz de un ángulo a un grafo de corte dado. Si queremos alinear dos aristas adyacentes, lo que tenemos que hacer obviamente es doblar por la bisectriz del ángulo que forman. Veremos que para alinear todas las aristas de un grafo de corte dado, tendremos que doblar por todas las aristas de su esqueleto (y por más sitios).

Ya estamos en condiciones de definir el esqueleto de nuestro grafo de corte, aunque con nuestra primera definición va a resultar difícil enterarse de lo que es el esqueleto en realidad. Pueden surgir muchas dudas al principio, pero las iremos aclarando.

Definición 1. El esqueleto de un grafo de corte es el conjunto de las trayectorias de los vértices de dicho grafo al encoger continuamente cada una de las caras, de forma que las aristas (encogidas) se mantienen paralelas a las aristas de corte originales y la distancia entre cualquiera de ellas y la arista de corte de la que proviene es la misma para todas ellas en un momento dado.

Para empezar a enterarnos de esto, veamos qué pasa con un dibujo muy sencillo: dos segmentos delimitando un ángulo, que aparecen en negrita en la Figura 4. Imaginemos que ambos segmentos se mueven de forma que su dirección no cambia y además la velocidad que llevan ambos es la misma, es decir, en un momento dado, ambos están a la misma distancia de su posición inicial. El esqueleto de esta figura es entonces la trayectoria que sigue el vértice del ángulo, es decir, la intersección de los segmentos que se desplazan. La condición de que en un momento cualquiera ambos segmentos se encuentren a la misma distancia de sus respectivas posiciones iniciales hace que la trayectoria de su intersección sea la bisectriz de ambos segmentos.

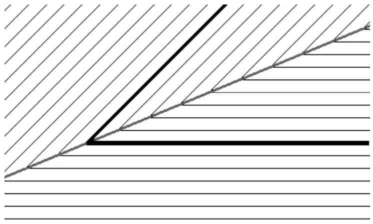


Figura 4

En un dibujo más complicado repetiríamos este proceso en cada cara de corte, desplazando los segmentos de la forma indicada y dibujando la trayectoria de sus intersecciones. En la Figura 4 lo hemos hecho en las dos caras del papel que separan los segmentos.

Nótese que, en un vértice del dibujo, localmente la situación coincide con la de dos segmentos y, por tanto, al menos en un entorno de un vértice de corte, el esqueleto está formado por la bisectriz de las dos aristas de corte que lo delimitan. Esto nos facilita mucho la tarea, porque localmente sólo tenemos que trazar bisectrices.

Al encoger una cara, nos van quedando caras más pequeñas, pero éstas pueden cambiar de forma por tres motivos:

1. Una arista pasa a tener longitud 0. En ese caso nos olvidamos de ella y continuamos encogiendo la figura formada por el resto de aristas.

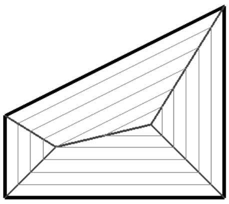


Figura 5: Al encoger el interior de este polígono observamos el evento 1 en el momento en que el cuadrilátero encogido pasa a ser un triángulo.

2. Una región pasa a tener área 0, es decir, el área que abarcaba se ha transformado en el proceso de encoger en un segmento. Entonces, dibujamos ese segmento (que sería como seguir encogiéndolo, de forma que fuéramos llevando los vértices hacia su centro), y continuamos encogiendo la figura que nos queda.

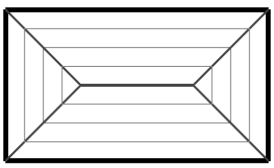


Figura 6: Al encoger el interior de un rectángulo observamos el evento 2.

3. La cara que estamos encogiendo se transforma en dos (o más) caras distintas. En este caso, continuamos encogiendo cada una de las caras nuevas por separado.

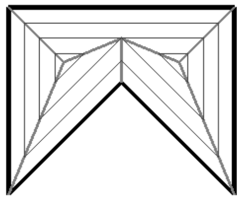
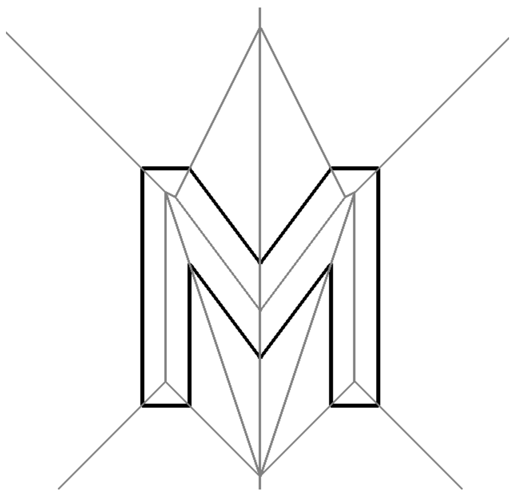


Figura 7: Al encoger la cara interior de este polígono observamos el evento 3 en el momento en que el pentágono encogido pasa a ser dos triángulos.

Informalmente, lo que queremos decir con todo esto es que, en cada momento, uno tiene que encoger la cara que tiene y, si cambia de forma, continuar encogiendo esa cara con esa nueva forma, considerando como vértices de esta nueva cara todos los puntos de su frontera que vienen de los vértices de corte por el proceso de encoger.

Vamos a ver otro ejemplo para fijar un poco más el concepto de esqueleto, esta vez mostrando el de la letra M. Para realizarlo, hemos tenido que encoger tanto la cara de dentro como la de fuera (que puede ser visto como expandirla). En el proceso de su construcción han ocurrido los eventos 1, 2 y 3 (¿dónde?).



De la misma manera que para el grafo de corte, podemos definir **aristas de esqueleto**, **vértices de esqueleto** y **caras de esqueleto**. Veamos ahora un par propiedades del esqueleto que se deducen de su definición, y que nos serán muy útiles a la hora de construir el esqueleto y comprobar que lo hemos hecho bien:

Lema 1. Cada cara de esqueleto contiene una y sólo una arista de corte.

Si el lector ha entendido bien el proceso de encoger las caras de corte y los tres eventos que suponen cambios en este proceso, podrá darse cuenta de que este lema es cierto sin problema.

Lema 2. Toda arista de esqueleto es un subsegmento de la bisectriz de las dos aristas de corte contenidas en las dos caras de esqueleto que comparten dicha arista.

En el enunciado de este segundo lema tenemos que aclarar a qué nos referimos por bisectriz de dos aristas de corte paralelas. Si estas aristas de corte son paralelas y colineales, entendemos por bisectriz de ellas una recta perpendicular a ambas, y si por el contrario no son colineales, entendemos por bisectriz de ellas la recta paralela a ellas que está a igual distancia de ambas. Podemos ver ejemplos de estos dos casos en el dibujo de la M anterior: las aristas de corte verticales son paralelas y no colineales; y los dos segmentos del grafo de corte horizontales en la parte de arriba son paralelos y colineales, y su bisectriz es el eje de simetría de la M.

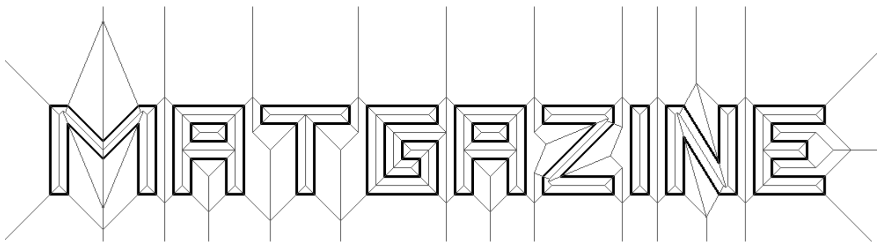
La demostración del segundo lema es sencilla: en el proceso de encoger las caras de corte descrito, las caras encogidas que nos van quedando en cada momento están delimitadas por aristas que son paralelas a (algunas) aristas de corte, y estas aristas encogidas estarán en la misma cara de esqueleto de las aristas de corte de las que provienen y a la misma distancia de ellas. Por tanto, si dos aristas son adyacentes en una cara encogida y estas no forman un ángulo de 180º, la trayectoria que va a seguir el vértice que tienen en común estará en la bisectriz de ambas hasta que ocurra alguno de los tres eventos descritos anteriormente. Si estas dos aristas adyacentes en una cara encogida forman un ángulo de 180º, al seguir encogiendo esa cara el vértice describirá claramente una trayectoria perpendicular a ambas dos. Nos queda por analizar el caso correspondiente al evento 2, en el que dibujamos el segmento (arista de esqueleto) en el que se ha convertido una región encogida degenerada que ha pasado a tener área 0, y es claro que este caso proviene de dos aristas de corte paralelas no colineales, siendo la arista de esqueleto dibujada un subsegmento de la bisectriz de ambas aristas de corte, tal y como la hemos definido en el párrafo anterior.

Después de conocer estas dos propiedades del esqueleto, podemos intuir por qué es importante para nuestra construcción, y de qué manera generaliza el concepto de bisectriz. El problema es que doblar sólo por las aristas de esqueleto no es suficiente para que quede plano el papel. Para ello, en la siguiente sección incluiremos algunas "perpendiculares".

El método que hemos descrito para trazar el esqueleto de un grafo de corte puede parecer algo costoso. Lo cierto es que existen algoritmos de ordenador que computan el esqueleto de grafos planos cualesquiera.

Antes de seguir, debemos aclarar algo. El esqueleto, así como las perpendiculares que definiremos en la siguiente sección, está definido en todo el plano, y nosotros lo que tenemos es un trozo de papel (acotado). A la hora de dibujar el esqueleto (y las perpendiculares) tendremos que imaginarnos cómo será dicha construcción en su totalidad, y luego dibujar en nuestro papel sólo la parte que nos quepa. Podría ocurrir que la trayectoria de un vértice al hacer el proceso de encoger las caras se saliera del papel y luego volviera a entrar, así que no tenemos que conformarnos sólo con ver que las líneas que dibujemos salgan del papel.

Para terminar de hablar sobre el esqueleto, y para que el lector se familiarice con ejemplos más complicados que los anteriores, en la siguiente ilustración se muestra el esqueleto de la palabra MATGAZINE (es una revista de estudiantes universitarios de Matemáticas). Nótese que en este caso hay 12 caras de corte, y hemos tenido que ver cómo se encoge cada una de ellas para determinar el esqueleto mostrado en la figura.



Construcción de las perpendiculares

Si la motivación del esqueleto viene de alinear todas las aristas de corte, la de las perpendiculares viene de querer hacer posible que el diagrama de dobleces dado por las aristas de esqueleto se doble plano, sin interferir con él. La intuición nos dice que si gracias al esqueleto podemos alinear dos aristas de corte, para no estropear esto y que sigan alineadas lo único que podemos hacer es doblar además por perpendiculares a las aristas de corte.

Describamos el método de construcción de las perpendiculares: Desde cada vértice V del esqueleto, intentamos dibujar en cada cara de esqueleto incidente a ese vértice un segmento perpendicular a la arista de corte contenida en esa cara de esqueleto. Decimos "intentando dibujar" porque en algunos casos este segmento perpendicular se sale inmediatamente de la cara de esqueleto en cuestión (antes de entrar en ella estrictamente), y no podemos dibujarlo. Esto pasa, por ejemplo en el vértice de esqueleto que está más arriba en la Figura 9. Si el segmento perpendicular a dibujar desde V coincide con una arista de esqueleto adyacente a V, consideraremos que podemos dibujar la perpendicular en cuestión y pasaremos a considerar esa arista de esqueleto también como una perpendicular. Éste es el caso de F y G en la Figura 9, dibujadas ahora con línea discontinua para resaltar su carácter de perpendiculares.

En los casos en los que hemos podido dibujar el segmento perpendicular s en cuestión, éste puede salir de la cara de esqueleto C en la que está por uno de sus otros vértices, o por un punto p del interior de una de sus aristas A. Si sale por otro vértice, no hacemos nada. Supongamos pues que sale por el interior de su arista A, y sea C' la cara de esqueleto que comparte con C la arista A. Entonces, dibujamos en C' desde p un segmento s' perpendicular a la arista de corte contenida en C'. Esto es lo mismo que reflejar s por A, ya que como A es la bisectriz de las aristas de corte contenidas en C y C', también será la bisectriz de s y s'. Nótese que siempre podremos dibujar un tal s'. En la siguiente figura se muestra esta situación.

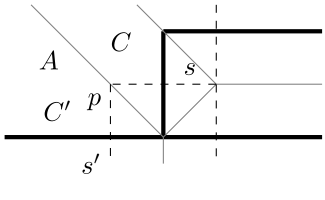


Figura 8: Cómo se continúa la perpendicular s tras cortar a la arista A.

Continuamos el proceso de alargar la poligonal formada por s y s' hasta que uno de los segmentos perpendiculares que vamos dibujando acabe en un vértice, o se alargue hasta el infinito, es decir, que no sea un segmento sino una semirrecta. Si el proceso acaba sin importar el vértice de esqueleto en que se empiece, hacemos lo mismo para el resto de vértices de esqueleto, y algunas de las perpendiculares resultantes quedarán conectadas entre sí, dando lugar a distintas componentes conexas de perpendiculares. Ponemos nombre a las componentes conexas de perpendiculares como se muestra en el dibujo.

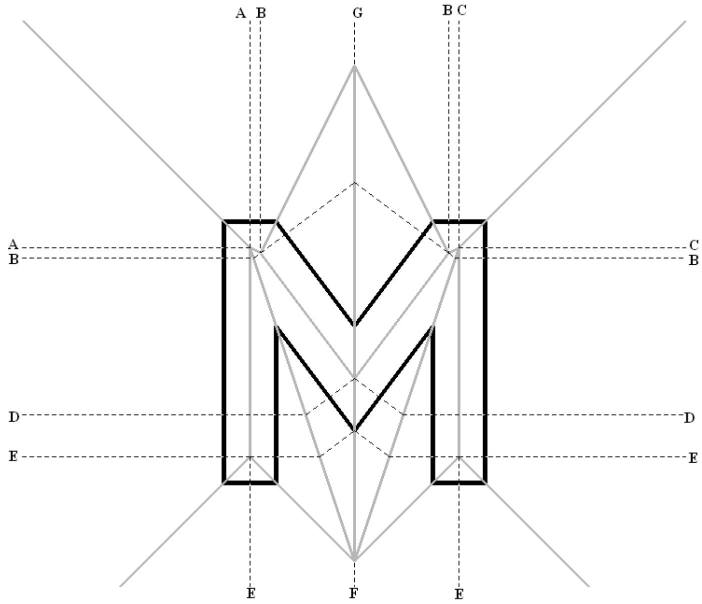


Figura 9: Éste es el aspecto que tiene nuestra M al dibujarle las perpendiculares, trazadas con línea discontinua. Como en todos los dibujos a partir de ahora, el grafo de corte está en negrita, el esqueleto en línea continua fina y las perpendiculares en línea discontinua.

¿Puede no acabar este proceso de construcción de las perpendiculares? Tristemente, sí. Tenemos dos casos malos:

- **Comportamiento en espiral:** El proceso de construcción de las perpendiculares no acaba, pero en nuestro trozo de papel, que está acotado, sólo aparecen un número finito de perpendiculares. Como sólo doblaremos por algunas de las perpendiculares que aparezcan en nuestro papel, y sólo hay un número finito de ellas, esto no nos supondrá ningún problema. De todos modos, en este caso el número de dobleces dependerá del tamaño del papel.

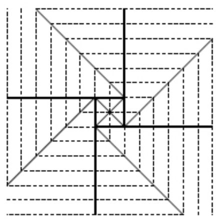


Figura 10: Imagen sacada de [3].

- **Comportamiento denso:** El proceso de construcción de las perpendiculares no acaba pero, además, en nuestro trozo de papel hay algún camino de infinitas perpendiculares. En estos casos el método del esqueleto no se puede aplicar.

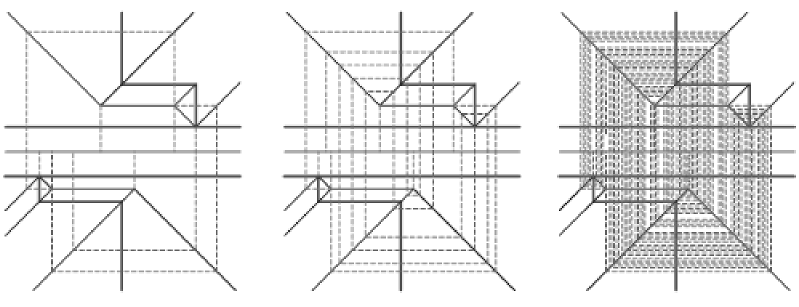


Figura 11: Distintas iteraciones en el algoritmo de la construcción de perpendiculares para este grafo de corte. Imagen sacada de [2].

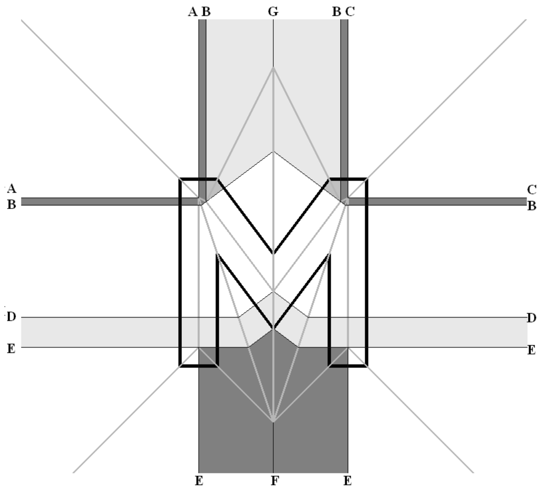
Afortunadamente, el comportamiento denso es muy extraño. Existe la conjetura de que tiene probabilidad 0. Si esta conjetura fuera cierta, y el lector quisiera recortar un grafo de corte que presenta este comportamiento, le bastaría perturbarlo un poco para evitar esto. No está probada, pero lo cierto es que en la práctica es dificilísimo que el lector se encuentre con una situación así. A partir de ahora, supondremos que estamos en un caso distinto al de densidad, es decir, que el algoritmo de construcción de perpendiculares acaba (en nuestro papel) y sólo tenemos un número finito de ellas dibujadas (también en nuestro papel).

Pasillos

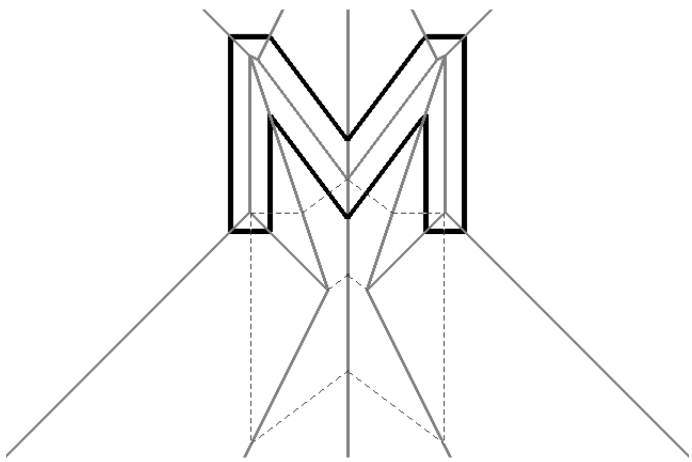
Como se puede apreciar en la Figura 9, las perpendiculares dividen nuestro plano en distintas regiones, que llamaremos **pasillos**. Estos pasillos tienen "anchura" constante (de ahí su nombre), tienen una o dos paredes y que son como uno de estos cuatro:

Figura 12: Tipos de pasillos (en orden): lineal de dos paredes, lineal de una pared, circular de dos paredes y circular de una pared.Imagen sacada de [3].

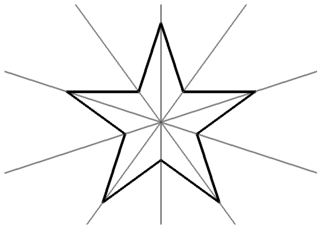
Veamos el ejemplo de la Figura 9 con los pasillos coloreados para apreciar mejor su estructura y entender mejor los tipos diferentes de pasillos. Todos los pasillos que aparecen son lineales de dos paredes, menos los que están en las cuatro esquinas, que son lineales de una pared.



Sin embargo, si dibujamos una M algo distinta pueden aparecer otro tipo de pasillos. En la siguiente imagen se ha dibujado un pasillo circular de dos paredes que aparece en otra M diferente (el resto de pasillos no se han dibujado).



Por último, en la siguiente figura tenemos un ejemplo de pasillo circular de una pared degenerado (su pared es el único vértice de esqueleto, no podemos dibujar ninguna perpendicular).

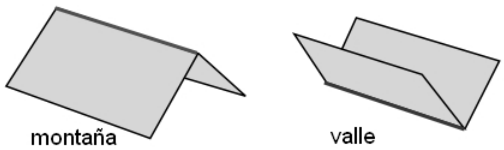


Doblado

El método del esqueleto va a ser válido en los casos en los que sólo tengamos pasillos lineales (de una o dos paredes). Esto no nos debe preocupar mucho. Hay una conjetura que afirma que en un grafo de corte donde los vértices tienen grado dos como máximo (en particular polígonos disjuntos) sólo aparecen pasillos lineales con probabilidad 1. No está probada, pero en la práctica, aunque el lector se pueda encontrar con situaciones en las que aparecen pasillos circulares (y no es demasiado difícil que aparezcan en grafos de corte que presenten alguna simetría), bastará cambiar un poco el grafo de corte para que esto no ocurra. Tanto en el ejemplo de la Figura **??** como en el de la Figura **??**, los pasillos circulares aparecen por la simetría de la figura. Notemos que a pesar de que hemos dicho que el método del esqueleto sólo va a ser válido en general en los casos en los que no tenemos pasillos circulares, sabemos cómo doblar el papel y cortar la Figura **??** ayudándonos del esqueleto como se muestra en la Figura 1.

Pasamos ahora a considerar sólo casos con pasillos lineales, y vamos a ver cómo podemos encontrar un doblado plano de nuestro papel que nos alinee todas las aristas de corte y nada más. Nos vamos a imaginar que recortamos por todas las paredes de todos los pasillos, separándolos. Vamos a explicar cómo doblaríamos un único pasillo y luego vamos a ver que doblados todos los pasillos, se puede volver a pegar todo por donde habíamos recortado, es decir, se puede doblar todo a la vez.

Cogemos un pasillo cualquiera, y lo doblamos como si fuera un acordeón (alternando dobleces valle y montaña) por las aristas de esqueleto que están en ese pasillo. Como los pasillos tienen anchura constante si tienen dos paredes, en este caso quedarán doblados como una franja.



Como las aristas de esqueleto son las bisectrices de las aristas de corte contenidas en las caras de esqueleto que comparten la arista de esqueleto en cuestión, con este método todas las aristas de corte que haya en ese pasillo quedarán alineadas, y sólo ellas estarán en esa línea. Además, encima y debajo de la línea de corte nos quedan caras de corte distintas, que es lo que queremos. Ahora vemos por qué no se puede utilizar este método para pasillos circulares en general: no tienen por qué poderse doblar así, como un acordeón.

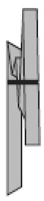


Figura 13: Así queda doblado un pasillo lineal de dos paredes. En negrita se muestra la parte del grafo de corte contenida en el pasillo, que queda alineado. Imagen sacada de [2].

Para saber cómo doblar, esto es suficiente. Hay que intentar doblar como un acordeón cada pasillo, y un buen consejo para hacerlo es empezar por el pasillo más complicado y tortuoso que se tenga en el dibujo, intentar adaptar el doblado del resto de pasillos a éste y, una vez hecho esto, doblar por las fronteras de los pasillos que sea necesario para que el doblado quede plano (diremos de qué pasillos en el siguiente párrafo, pero en la práctica se hace intuitivamente). Nótese que es mucho más difícil doblar todos los pasillos bien a la vez en el mismo folio que no si se recortan, pero el método funciona y siempre va a ser posible doblar todos los pasillos como queremos sin recortar.

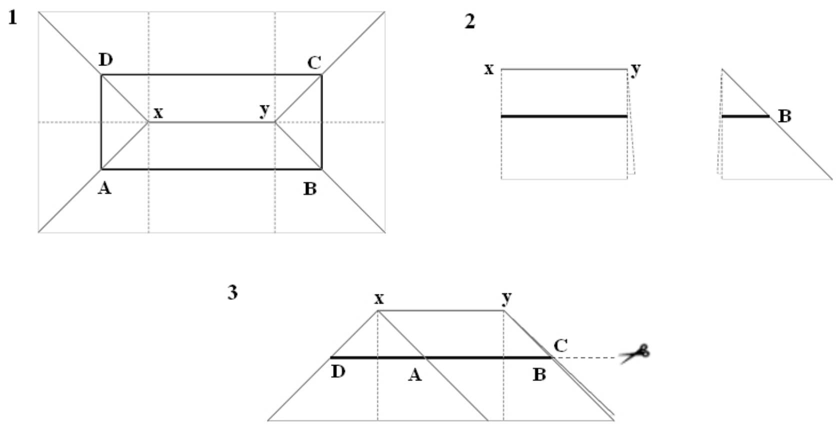


Figura 14: En 1 se muestra el grafo de corte de un rectángulo de vértices A, B, C y D, su esqueleto, con vértices x e y y las perpendiculares que parten de estos vértices en una hoja de papel. En 2 se muestran el pasillo central y el inferior derecho doblados por separado como acordeones. En 3 se muestra el papel doblado y listo para cortar.

Ahora vamos a decir por qué fronteras de pasillos es necesario doblar exactamente, aunque, como ya se ha dicho, este paso en la práctica se hace de manera intuitiva. Construimos el grafo métrico[1] que tiene tantos vértices como componentes conexas de perpendiculares, y si entre dos de estas componentes hay un pasillo, entonces los correspondientes vértices estarán unidos por una arista de longitud la anchura de ese pasillo. Además, en los vértices del grafo correspondientes a las componentes conexas de perpendiculares que delimitan pasillos lineales de una pared, dibujaremos tantas semirrectas saliendo de ellos como pasillos lineales de una pared delimite esa componente conexa de perpendiculares. Está demostrado que en este grafo no puede haber ciclos (caminos de aristas que no se repiten en un grafo que empiezan y acaban en el mismo punto). A estos grafos se les llama árboles, y tienen el aspecto de la figura siguiente.

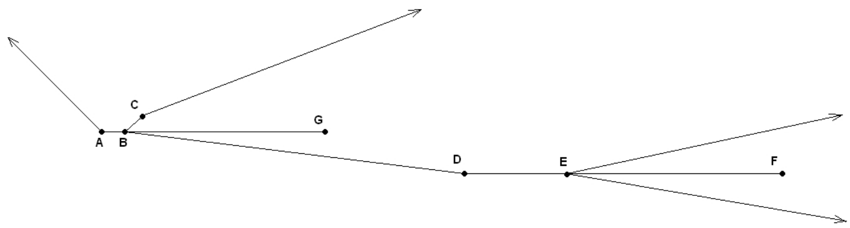


Figura 15: Árbol métrico asociado a la Figura 9.

Nuestro árbol modeliza bien lo que está ocurriendo en la realidad. Una vez sabemos que nuestros pasillos se han doblado bien como acordeones por separado, y una vez doblados se pegan bien todos juntos dándonos el papel entero bien doblado y listo para recortar, es sencillo darse cuenta de que, en este pegado, una componente conexa de perpendiculares acaba toda junta en una línea (por donde se pegan los distintos pasillos que tienen como frontera parte de esa componente conexa de perpendiculares). Por tanto, visto desde arriba, nuestros pasillos doblados y pegados tienen el aspecto del árbol métrico que hemos construido. Así pues, lo único que nos queda por probar es que este árbol (como estructura unidimensional) se puede doblar plano. Esto es trivial, ya que vale coger el árbol por un vértice cualquiera, y dejar que cuelgue. El doblado que hagamos en nuestro papel se leerá de este árbol. Claramente, esta forma de doblar nuestro papel nos alinea todas las aristas del grafo de corte, y nada más estará en esa línea, por lo que podremos pegar el tijeretazo y que se recorte todo lo que queríamos.

Ya está. Por fin podemos doblar y recortar grafos de corte "buenos" (sin comportamiento denso ni pasillos circulares) según el método del esqueleto.

§3. Método del empaquetamiento de discos.

Como ya hemos dicho, éste es el método que vale para todos los grafos de corte. No vamos a entrar en detalles, pero veamos un dibujo de las construcciones auxiliares que se tienen que hacer para recortar una figura simple como es la de la página siguiente.

[1]Un grafo métrico es un grafo en el que tenemos en cuenta la longitud de las aristas.

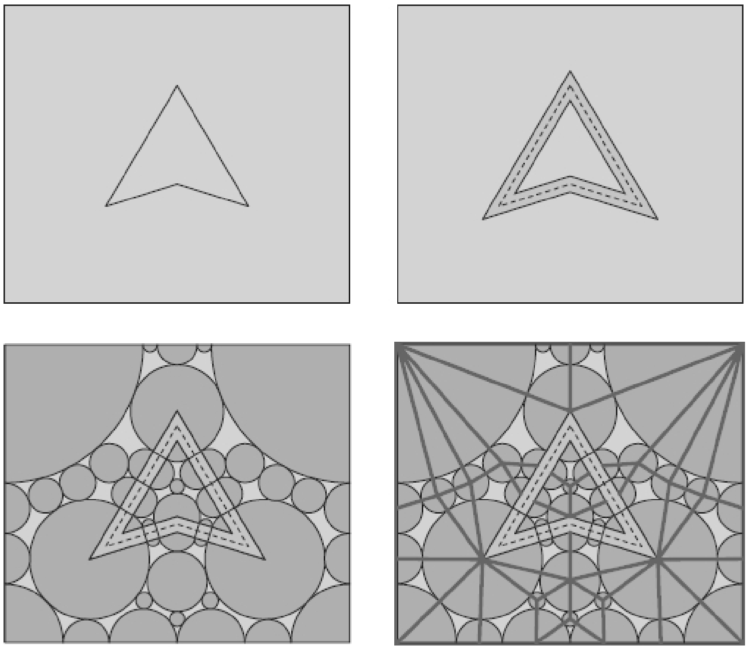


Figura 16: Imagen sacada de [3].

Lo que se hace aquí es:

1. Ensanchar el grafo de corte un poco de manera que siga teniendo la misma forma.
2. Llenar el papel (menos el grafo ensanchado) de discos tal que los vértices del grafo ensanchado sean centros de discos, las aristas del grafo ensanchados estén totalmente cubiertas por radios de discos, los discos que se tocan lo hagan de manera tangente, y los huecos entre discos estén delimitados por tres o cuatro arcos de circunferencia.
3. Unir el centro de cada disco con aquellos centros de discos tangentes a él. Esto nos llena el papel de triángulos y cuadriláteros, que pueden ser interiores o exteriores a nuestra figura.
4. Doblar cada triángulo y cuadrilátero de una determinada forma (llamada molécula) en la que quedan alineadas todas las aristas que lo delimitan.
5. Modificar el doblado de las moléculas exteriores para que caras distintas de corte queden a lados distintos de la línea por la que tenemos que cortar.

Con sólo esta breve descripción nos damos cuenta de que este método es inviable en la práctica, aunque demuestre el teorema. La figura del dibujo se podría recortar rápidamente usando el método del esqueleto.

Referencias

[1] O'Rourke, Joseph. *How to Fold It. The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra.*, Cambridge Univerity Press (2011).

[2] Demaine, Erik. O'Rourke, Joseph. *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra.*, Cambridge University Press (2007).

[3] Demaine, Erik. Demaine, Martin. Lubiw, Anna *Folding and Cutting Paper*, en "Revised Papers from the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry (JCDCG'98)", Lecture Notes in Computer Science, volume 1763, Tokyo, Japan, December 9–12, 1998, páginas 104–117.

[4] Sección de la página personal de Erik Demaine dedicada a este problema: http://erikdemaine.org/foldcut/