

TEORÍA DE NÚMEROS

1. Congruencias

Se dice que dos números a, b son congruentes módulo m ($a \equiv b \pmod{m}$) si ambos tienen el mismo resto al dividirlos por m .

Se cumple que $a \equiv b \pmod{m} \iff m | a - b$

Además, las congruencias pueden sumarse, restarse o multiplicarse, es decir se cumple que si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$:

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$$

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

Así, se cumple que:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$$

donde $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con a_i números enteros.

En general, esto no se cumple para la división, pero si se cumple lo siguiente:

$$\text{mcd}(c, m) = 1, ca \equiv cb \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

2. Pequeño teorema de Fermat

Sea a un entero positivo y p un número primo. Entonces:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Por el resultado visto en el apartado anterior sabemos que si $\text{mcd}(a, p) = 1$, entonces

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$