Problema1. Probar que no existe ninguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n + 1$. (OME 2000)

Solución.

Supongamos que existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n + 1$.

Sea $f(0) = a$, a un número natural. Por el enunciado, $f(f(0)) = f(a) = 1$. Del mismo modo $f(1) = f(f(f(0)) = f(f(a)) = a + 1, f(a + 1) = 2, ...$

Así, $f(f(n)) = f(a + n) = 2a + n$. Entonces, $2a + n = n + 1 \Rightarrow a = 1/2$, pero $1/2$ no es natural y hemos llegado a una contradicción. Luego no existe una función como la del enunciado.

Problema 2. Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que, al menos, el producto de dos de estos números es un cuadrado perfecto. (Fase local, 2008)

Solución.

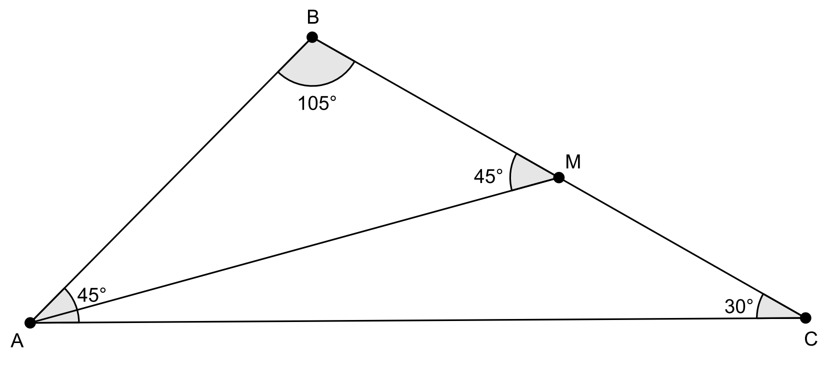
Todos estos 17 números se pueden descomponer en factores primos de la forma $2^a 3^b 5^c 7^d$, donde sus exponentes a, b, c, d son enteros no negativos.

Si dos números de este tipo, es decir, $2^a 3^b 5^c 7^d$ y $2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} 7^{d'}$, se multiplican, su producto es $2^{a+a'} 3^{b+b'} 5^{c+c'} 7^{d+d'}$, y si los cuatro exponentes $a + a', b + b', c + c', d + d'$ son pares, este producto es un cuadrado perfecto.

Para que esto ocurra, las dos cuaternas (a, b, c, d) y (a', b', c', d') deben tener igual paridad, es decir, a y a', b y b', c y c', d y d' deben tener respectivamente la misma paridad. Como cada uno de los cuatro números a, b, c, d puede ser par o impar, hay un total de 16 cuaternas con distinta paridad entre sí. Al tener 17 números y, por tanto, 17 cuaternas, por el principio del palomar, dos deben tener igual paridad y entonces su producto es un cuadrado perfecto.

Problema 3. Se considera el triángulo ABC con $\angle BAC = 45^o$ y $\angle ACB = 30^o$. Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que $\angle AMB = 45^o$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$.

Solución.



Para demostrar que $\angle AMB = 45^o$, bastará probar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MBA$ son semejantes. Como tienen un ángulo común, bastará probar la proporcionalidad de los lados correspondientes, es decir

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}.$$

Usando el Teorema del seno en el triángulo $\triangle ABC$ obtenemos

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AB}{\frac{BC}{2}} = 2\frac{\operatorname{sen} 30}{\operatorname{sen} 45} = \sqrt{2}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\operatorname{sen} 45}{\operatorname{sen} 30} = \sqrt{2}.$$

Luego

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Veamos finalmente que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$, o bien

$$(*) \qquad \frac{BC}{AB}\frac{AC}{AM} = 2.$$

Ya hemos visto que $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$. Además, como la razón de proporcionalidad de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MBA$ es $\sqrt{2}$ deducimos que $\frac{AC}{AM} = \sqrt{2}$. Ahora $(*)$ es inmediato.

Problema 4. Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara? (Fase Local, 2007)

Solución.

Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores.

Puesto que cada vértice ha de estar exactamente en una cara cuadrada, debe haber $V = 4 \cdot 12 = 48$ vértices. (Se obtendría el mismo resultado haciendo la cuenta con los hexágonos o los octógonos.)

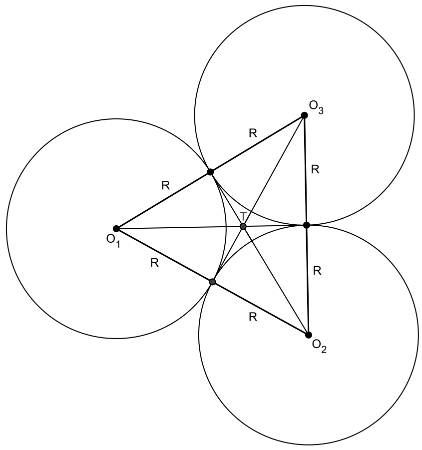
Como de cada vértice salen exactamente 3 aristas, hay $A = 3V/2 = 72$ aristas.

Cada cuadrado tiene 2 diagonales, cada hexágono 9 y cada octógono 20 (d=n(n-3)/2), por tanto $D = 12 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 20 = 216$ diagonales sobre las caras.

Así, el número pedido I será igual al total de pares que se puedan formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, y restando las aristas y las diagonales sobre las caras, $I = \binom{48}{2} - A - D = 840$.

Problema 5. Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es además, tangente exterior a las dos primeras. Encontrar la relación entre R y r.

Solución.



Los centros O_1, O_2, O_3 de las tres esferas de radio R son los vértices de un triángulo equilátero.

Los centros de las dos esferas de radio r determinan una recta perpendicular al plano determinado por los centros de las esferas de radio R. El punto de tangencia T de las esferas de radio r debe ser el centro del triángulo equilátero anterior. Los cinco vértices son los vértices de un doble tetraedro. Sea C_1 uno de los centros de las esferas de radio r y consideremos el tetraedro $O_1O_2O_3C_1$.

T es el pie de la altura desde C_1 y se verifican las relaciones

$$O_1O_2 = 2R, O_1C_1 = r + R, C_1T = r.$$

El triángulo C_1O_1T es rectángulo en T y se tiene

$$O_1T = \frac{2}{3}R\sqrt{3}.$$

Una aplicación del Teorema de Pitágoras en este último triángulo nos permite escribir

$$(r + R)^2 = \frac{4R^2}{3} + r^2,$$

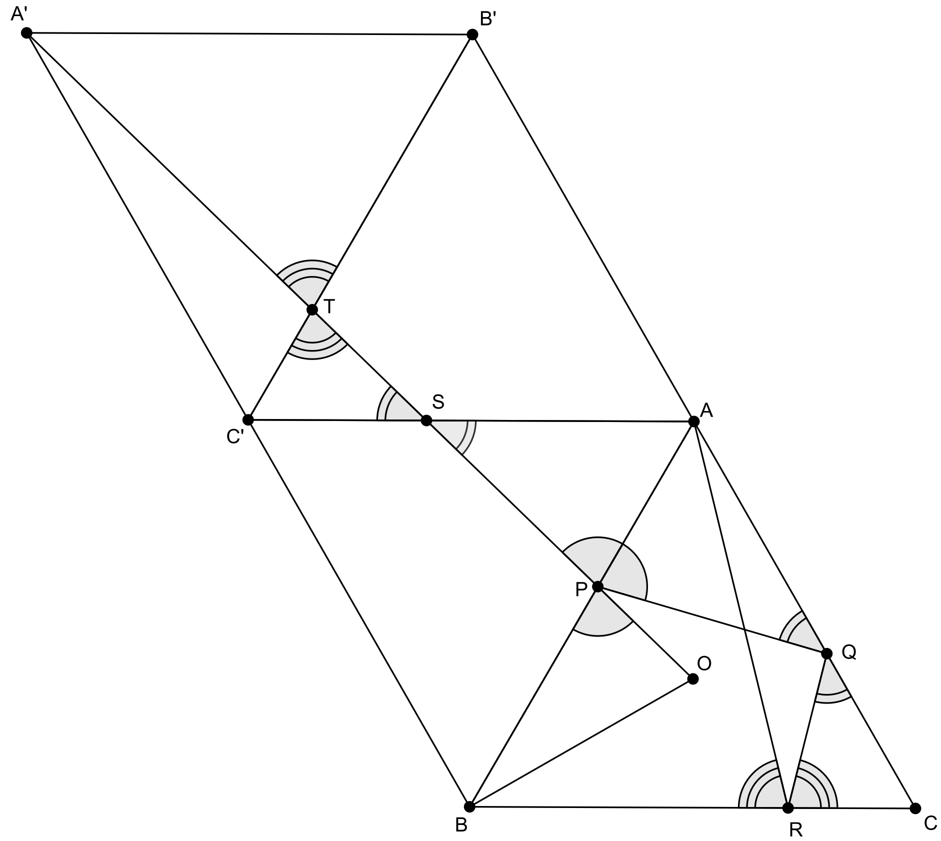
que se simplifica para dar

$$2Rr = \frac{1}{3}R^2 \Leftrightarrow R = 6r.$$

Problema 6. Se considera un triángulo equilátero ABC de lado 1 y centro O. Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados del triángulo AB, AC, BC (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A. Determinar la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota. Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

Solución.



Construimos los triángulos equiláteros $C'BA$, $B'C'A$ y $A'C'B'$ como en la figura. Supongamos que existe un rayo que rebota una vez en cada lado, y llamamos a los puntos de rebote P, Q y R. Consideramos los puntos S y T como la intersección de OA' con $C'A$ y $C'B'$, respectivamente.

Como $\angle SPA = \angle OPB = \angle APQ$, $\angle SAP = 60^{\text{o}} = \angle PAQ$ y el lado AP es común, deducimos que los triángulos APS y APQ son iguales. Por tanto, $PQ = PS$.

Análogamente obtenemos que $\triangle C'ST = \triangle CQR$ y $\triangle A'B'T = \triangle ABR$. Por tanto $QR = ST$ y $RA = TA'$.

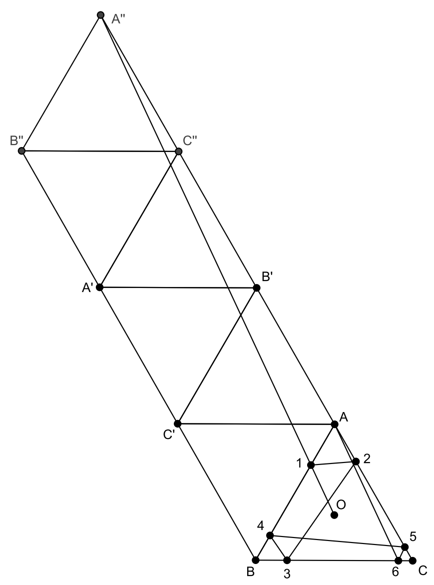
Así, si tal rayo existiese, el punto P se obtendría como intersección de AB y OA'. Está claro pues que dicho rayo existe y es único.

La longitud del rayo será

$OP + PQ + QR + RA = OP + PS + ST + TA' = OA'$.

Como $BO = \frac{2}{3}h$, siendo h la altura del triángulo equilátero ABC (de lado 1), $BA' = 2$ (dos veces el lado) y el ángulo $A'BO$ es recto, usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que $OA' = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

Notar que para rayos que rebotan más de una vez en cada lado son únicos y la longitud será mayor (ver en la figura el caso en el que el rayo rebota dos veces en cada lado).



Problema 7. Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden en el mismo eje. Demostrar que el triángulo es acutángulo. (Fase Local, 2004).

Solución.

Sean A, B, C los vértices del triángulo. Denotamos respectivamente x, y, z las distancias de los vértices al origen de coordenadas; y también respectivamente a, b, c a las longitudes de los lados opuestos a los vértices.

Vamos a probar que un ángulo cualquiera es agudo (con los demás se procedería de forma análoga), para ello vamos a ver que $\cos A > 0$. Por el teorema del coseno sabemos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Luego basta demostrar que $a^2 < b^2 + c^2$.

Por el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 = y^2 + z^2, b^2 = x^2 + y^2, c^2 = x^2 + z^2$. Por tanto $b^2 + c^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 = a^2$.

Problema 8. Denotemos $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ con las siguientes propiedades:

i) $f(2) = 2$,

ii) $f(nm) = f(n) + f(m)$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$.

Solución. De las propiedades se deduce:

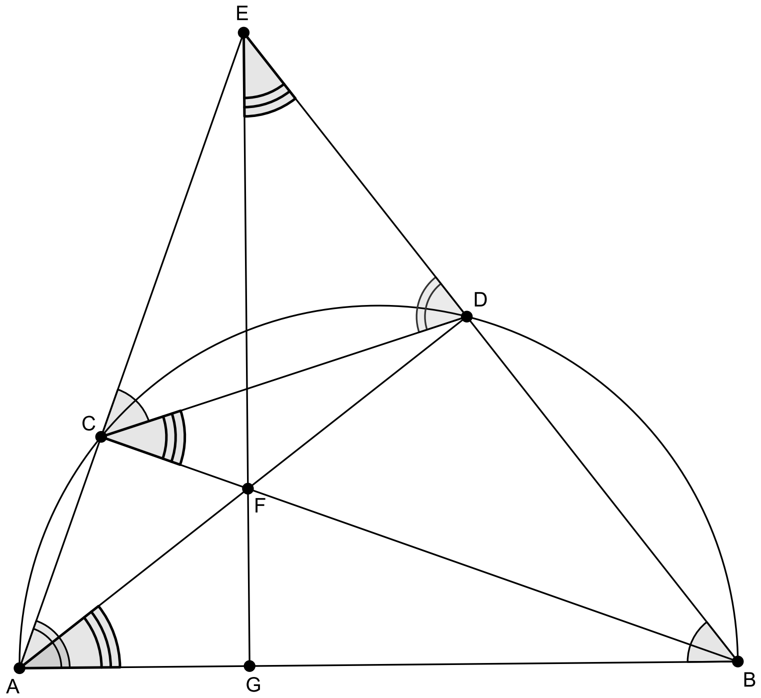
1. Haciendo $m = 1$, se sigue de *ii)* que $f(1) = 0$.
2. Por inducción finita sobre *ii)*, se sigue que $f(nk) = k \cdot f(n), \forall n, k \in \mathbb{N}$.

Veamos si puede construirse una función creciente con estas propiedades. Ya que $f(4) = f(2^2) = 2 \cdot f(2) = 4$, resulta que los únicos posibles valores de $f(3)$, si f es creciente, son 2,3 y 4.

1. Si $f(3) = 2$, nos encontramos con que $2^3 < 3^2$, pero $f(2^3) = 6 > 4 = f(3^2)$.
2. Si $f(3) = 3$, nos encontramos con que $2^{11} < 3^7$, pero $f(2^{11}) = 22 > 21 = f(3^7)$.
3. Si $f(3) = 4$, nos encontramos con que $3^3 < 2^5$, pero $f(3^3) = 12 > 10 = f(2^5)$.

Problema 9. Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera la cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC. Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la circunferencia.

Solución.



Como $\angle ECD = \angle ABE$ (ya que ambos comprenden el arco AD de la semicircunferencia) y $\angle EDC = \angle BAE$, deducimos que los triángulos ECD y EBA son semejantes. Además, $\angle BCD = \angle BAD$. Por tanto

$$\angle ECF = \angle ECD + \angle DCF = \angle ABD + \angle BAD = 90,$$

ya que $\angle ADB = 90$ (abarca el diámetro AB). Análogamente $\angle EDF = 90$ y por tanto, el cuadrilátero $ECFD$ es cíclico de diámetro EF.

Por el Teorema del seno tenemos que

$$EF = \frac{CD}{\operatorname{sen} \angle CFD} = \frac{CD}{\operatorname{sen}(90 + \angle FBD)} = \frac{CD}{\cos \angle FBD}.$$

Como CD es constante y $\angle FBD$ también (por ser constante el arco que lo comprende) deducimos que EF es constante.

Además, si llamamos G a la intersección de EF con AB, tenemos que

$$\angle EGB = 180 - (\angle GBE + \angle GEB) = 180 - (\angle ECD + \angle DCF) = 180 - \angle ECF = 90.$$

Así, la dirección de EF es siempre perpendicular a AB.