Sobre hombros de gigantes
Matemáticas e Historia

José María Sorando Muzás

web "Matemáticas en tu mundo"
http://catedu.es/matematicas_mundo

La relación entre Matemáticas e Historia se establece al menos en tres sentidos:

Hay una Historia de las Matemáticas que nos muestra el surgimiento de ciertos problemas y las diversas soluciones a los mismos intentadas en el tiempo; su evolución y la de los conceptos nacidos en ese proceso.

Hay una visión de las Matemáticas insertas en la Historia. Como cualquier obra humana se han desarrollado en unas condiciones históricas y sociales, a favor o en contra de los poderes político y religioso, también dentro de una ideología. No surgen "porque sí". A su vez han contribuido decisivamente a transformar nuestra sociedad, nuestra forma de vivir.

Y, en tercer lugar, las historias de los matemáticos nos muestran peripecias personales llenas de azares, donde se dan cita heroísmo, abnegación y esfuerzo; pero también intereses, traiciones y ambición. Muchos de su protagonistas podrían ser personajes de apasionantes novelas (Evaristo Galois, Sophie Germain, Nicolo Fontana "Tartaglia", etc.). Las Matemáticas no son un saber llegado desde otro planeta, sino una obra humana forjada a través de los siglos, con muchas vidas detrás.

¿Por qué estos empeños individuales y colectivo por resolver esos problemas matemáticos? En 1830, el matemático alemán Jacobi lo resumió en una frase: *"Por el honor del espíritu humano"*. Y hay que añadir que, además del honor como ideal, han ejercido una poderosa motivación los honores, el reconocimiento, poder alcanzar cierta inmortalidad a través de un teorema que sobreviva a su creador portando su nombre. En esas líneas cabe situar los intentos durante 351 años por resolver el llamado Teorema de Fermat, aunque hoy lo debemos llamar Teorema de Wiles en honor a quien finalmente lo demostró.

Pero la creación matemática también está motivada por su utilidad. Esa óptica utilitaria ha sido el motor de ciertos conceptos y herramientas como, por ejemplo, los logaritmos, surgidos para aliviar los grandes cálculos en la Navegación en el s. XVIII. Recordemos que los logaritmos reducen la dificultad de las operaciones a realizar: el logaritmo de un producto es una suma de logaritmos; el de un cociente es una resta; el de una potencia es un producto; y el de una raíz es un cociente.

El reto intelectual, la búsqueda de la gloria y la utilidad son tres ingredientes que, en proporciones variables según los casos, se han combinado para erigir esta obra monumental de la cultura que son las Matemáticas.

De sus muchos episodios ricos e intensos, he elegido para hoy el acceso al concepto de función y el paso de las funciones al Cálculo Diferencial. Uno de sus principales protagonistas, Isaac Newton (1642 – 1727) dijo esta famosa frase: *"Si he llegado tan alto fue porque estaba sobre hombros de gigantes"*. Los gigantes de que hablaba Newton eran sus predecesores Arquímedes, Kepler, Galileo y otros, quienes habían dejado abiertos interrogantes e iniciados métodos que Newton y Wilhelm Gottfried Leibnitz (1646 – 1718) habían de recoger y culminar, creando dos herramientas tan potentes y decisivas como el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. Quienes seáis estudiantes de Bachillerato ya conocéis algo de ellos, no así los de ESO, que sí conocéis las funciones. Espero que esta sesión sirva a los primeros para dar más sentido a lo que ya conocen; y a los segundos, para recibir con mayor motivación esas próximas enseñanzas.

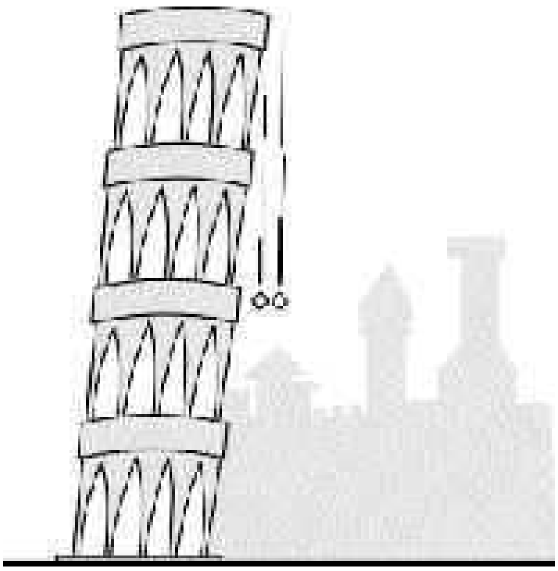
Funciones para entender el mundo.

En el s. XVII, a la vez que se conseguía conocer el movimiento de los planetas, se comenzó a investigar cómo suceden los fenómenos naturales en la Tierra, qué leyes siguen. Fue el nacimiento de la experimentación y de la Física moderna. Uno de los primeros y más importantes resultados fue saber que el mismo principio que explica muchas cosas de las que vemos en la Tierra es el que también rige los movimientos de los planetas en el cielo: la Gravitación Universal. Después, y hasta nuestros días, los científicos han experimentado y descubierto leyes con las que explicar todo tipo de situaciones (no sólo físicas, también económicas, sociales, etc.). La aplicación de esas leyes, a través de la tecnología, ha transformado el mundo.

Pero para que esta aventura del conocimiento se produjese, fueron necesarios nuevos conceptos y herramientas matemáticas: primero las funciones (Galileo), después el Cálculo Diferencial (Newton y Leibnitz).

En cualquier situación podemos observar diversos aspectos medibles o **magnitudes** (temperatura, tiempo, longitud, masa, etc.); algunas se mantienen **constantes**, pero otras tienen valores **variables**. Entre las variables, las hay cuyos valores son independientes y otras cuyos valores dependen de aquellas: **variables independientes** y **variables dependientes**, también llamadas **funciones.**

En un movimiento con velocidad constante, el tiempo transcurre independiente a cualquier otra magnitud y el espacio recorrido varía dependiendo sólo del tiempo transcurrido. Decimos entonces que, a velocidad constante, el espacio es función del tiempo: $\mathbf{s(t) = v \cdot t}$. Esta forma de pensar, hoy común, pero alguien tuvo que ser el primero en analizar de esa



forma los fenómenos naturales. Esa persona fue **Galileo Galilei** (1564 – 1642).

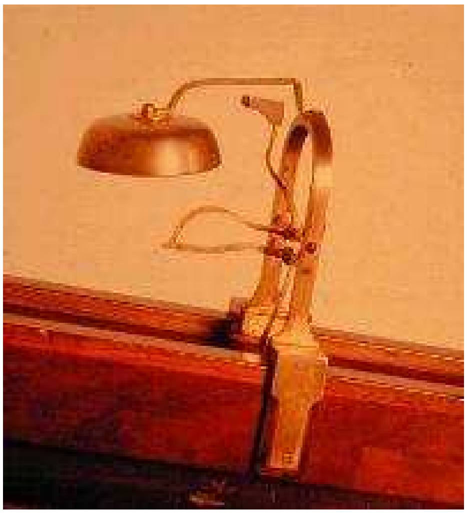
La Ley de Caída de los Cuerpos.

Según se dice, desde la plataforma superior de la torre de Pisa, Galileo dejó caer simultáneamente dos esferas: una pesada de hierro, y otra más ligera, de madera. A pesar de la gran diferencia de peso, ambas esferas caían juntas y llegaban al suelo en el mismo instante. Las velocidades de ambas aumentaban conforme caían, pero siempre se mantenían iguales entre sí; es decir, en su caída se aceleraban de igual manera. Y ocurriría igual con cuerpos más ligeros (una hoja de árbol, por ejemplo), si en esos casos no interviniese la resistencia del aire.

Así, Galileo supuso que la gravedad actúa igual sobre todos los cuerpos y enunció la Ley de Caída de los Cuerpos: "*en el vacío, los cuerpos caen con la misma aceleración*". Debía comprobar esta suposición con medidas experimentales que dieran lugar a una ley precisa, a una fórmula.

Pero Galileo no podía medir con suficiente precisión el tiempo y el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre, pues la caída se realiza demasiado rápidamente. Por esta razón, Galileo decidió "diluir la fuerza de gravedad" haciendo que una esfera rodase por un plano inclinado y repitió las mediciones en planos que cada vez tenían mayor pendiente, en unas situaciones que así eran cada vez más parecidas a la caída libre en vertical.

Leonardo da Vinci había supuesto que la evidente aceleración de un cuerpo que cae se producía de esta manera: "*si el espacio recorrido en un tiempo t dado es 1, en sucesivos intervalos de tiempo iguales a t el cuerpo recorre estos espacios: 1 – 2 – 3 – 4 -...*". Pero Galileo descubrió que la secuencia de espacios recorridos en tiempos iguales era otra: 1 – 3 – 5 – 7 -...



Para comprobarlo, se le ocurrió colocar unas campanitas a lo largo de la rampa, que sonarían al paso de la esfera (en la foto, dispositivo en el "Museo di Storia della Scienza" de Florencia). Después movió la colocación de las campanas hasta conseguir que sonasen a intervalos iguales de tiempo. Entonces, ya sólo tenía que medir las distancias entre cada dos campanas consecutivas.

Pero Galileo no tenía un cronómetro con el que asegurar que los tiempos eran iguales. Resolvió esa dificultad mediante un reloj de agua (clepsidra), en el cual se mide el tiempo por la cantidad de líquido que pasa a través de una pequeña abertura en el fondo de una gran vasija. Con gran paciencia, pesaba el agua ciada en cada intervalo de tiempo y experimentó así hasta obtener pesos iguales que corresponderían a tiempos iguales.

Midiendo las distancias recorridas durante esos intervalos iguales de tiempo, comprobó que seguían la sucesión de los números impares: 1 – 3 – 5 – 7 - ... etc. Cuando el plano estaba más inclinado, las correspondientes distancias eran más largas, pero sus relaciones eran siempre las mismas. Así, concluyó Galileo, esta ley debe regir también para el caso límite de caída libre.

Entonces, las distancias totales recorridas desde el comienzo hasta cada período de tiempo eran:

$S(1) = 1$, $s(2) = 1 + 3 = 4$, $s(3) = 1 + 3 + 5 = 9$, $s(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ... etc.

(Como ya sabrás, las sumas de impares consecutivos nos dan los números cuadrados perfectos)

Hasta aquí, para más comodidad, se ha supuesto que el espacio recorrido en el primer período de tiempo medía 1. Si fuese otra distancia C , los espacios recorridos en los sucesivos períodos serían:

C , $3\cdot C$, $5\cdot C$, $7\cdot C$ ... etc.

Y las distancias totales: $s(1) = C$, $s(2) = 4\cdot C$, $s(3) = 9\cdot C$, $s(4) = 16\cdot C$ ... etc.

En general: $\mathbf{s(t) = C \cdot t^2}$

¡**Ésta fue la primera función** expresada como tal en la Historia de la Ciencia!

Años después, con la implantación del Sistema Métrico Decimal, se diría que:

$$s(t) = 4{,}9 \cdot t^2 \quad \text{(s en metros y t en segundos)}$$

Pero era sólo un primer paso para el propósito de Galileo. Para llegar a demostrar la Ley de Caída de los Cuerpos (que la aceleración es la misma para todos ellos) se necesitaba un concepto desconocido hasta entonces: la derivada. Ese sería el siguiente capítulo de esta historia y otros serían sus protagonistas.

Necesidades matemáticas en el s. XVII.

Galileo quería demostrar que la aceleración es la misma para todos los cuerpos en caída libre. Pero para conseguir su propósito, pensemos en todo lo que aún le faltaba:

Había que comenzar por plantearse: ¿qué es la aceleración? ... el ritmo de cambio de la velocidad. Lo cual nos lleva a otra pregunta: ¿qué es la velocidad? ... el ritmo de cambio de la posición del cuerpo (del espacio recorrido).

*Así que, **era necesario estudiar el ritmo de cambio de una función**
(años más tarde se le llamaría ***derivada***).

Vamos a hacer una primera aproximación a ese estudio:

Para simplificar, supongamos que el cuerpo recorre un espacio de 1 m. en el primer segundo. Entonces:

t (segundos)	1	2	3	4	5
$s(t) = t^2$	1	4	9	16	25

Supongamos que queremos estudiar la velocidad en $t_0 = 2$. Para ello comparemos la situación en ese momento con la de un momento posterior, cada vez más cercano:

t	5	4	3
) t incremento de t desde $t_0 = 2$ hasta t	5 – 2 = 3	4 – 2 = 2	3 – 2 = 1
) s incremento de s desde $t_0 = 2$ hasta t	25 – 4 = 21	16 – 4 = 12	9 – 4 = 5
) s /) t velocidad media desde $t_0 = 2$ hasta t	21 / 3 = 7	12 / 2 = 6	5 / 1 = 5

Como vemos, la velocidad media no es la misma según la amplitud del intervalo de tiempo considerado. Así que, como lo que nos interesa es la velocidad en $t_0 = 2$, vamos a acercarnos más:

t	2,5	2,2	2,1
) t incremento de t desde $t_0 = 2$ hasta t	2,5 – 2 = 0,5	2,2 – 2 = 0,2	2,1 – 2 = 0,1
) s incremento de s desde $t_0 = 2$ hasta t	$2{,}5^2 - 4 = 2{,}25$	$2{,}2^2 - 4 = 0{,}84$	$2{,}1^2 - 4 = 0{,}41$
) s /) t velocidad media desde $t_0 = 2$ hasta t	2,25 / 0,5 = 4,5	0,84 / 0,2 = 4,2	0,41 / 0,1 = 4,1

Resumiendo resultados:

t	5	4	3	2,5	2,2	2,1
) s /) t velocidad media desde $t_0 = 2$ hasta t	7	6	5	4,5	4,2	4,1

Vemos que al reducir el intervalo de tiempo considerado, la velocidad media cada vez varía menos: parece que se está acercando a un número (¿4?). El último cálculo se refiere a un intervalo de tiempo muy breve: desde $t_0 = 2$ hasta $t = 2{,}1$ ... sólo una décima de segundo.

Pero nosotros no queremos saber la velocidad media de décima en décima de segundo, ¡sino al instante! (como en el velocímetro del coche, donde la vemos cambiar continuamente). Y ¿cuánto es un instante?: diremos que un) t casi cero. Desde luego, en ese instante,) s también será casi cero.

Así que **también era necesario estudiar**:

*** El cociente del incremento de una función entre el incremento de su variable independiente**
(en el ejemplo,) s /) t). Se le llama ***tasa de variación media***.

*** El cálculo con cantidades muy pequeñas, que son "casi cero"**.

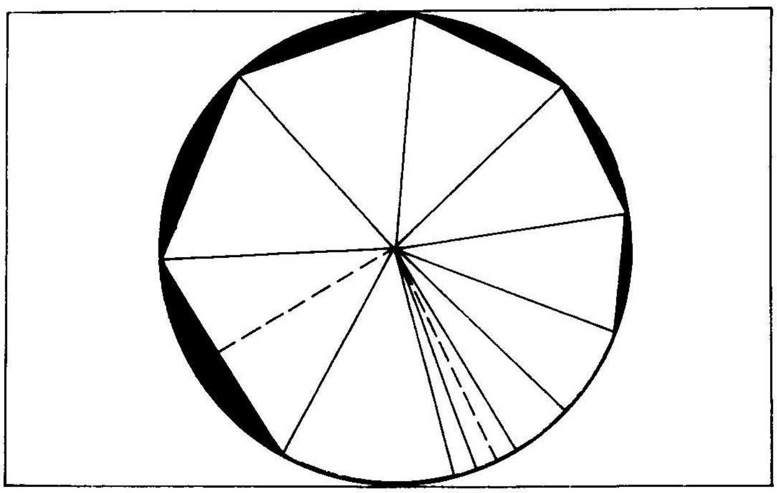
A esas cantidades se les llama ***infinitésimos*** y al cálculo con ellos, ***paso al límite***.

Como ves, en Matemáticas, para resolver un problema surge la necesidad de dominar nuevos conceptos que están "por debajo" de él. Sólo asegurando esos "cimientos" se puede construir luego un "edificio" de razonamientos que llegue hasta la solución del problema inicial. Galileo no pudo completar esta obra, pero dejó marcado el camino a sus sucesores (Newton y Leibnitz).

El paso al límite: antecedentes. El método exhaustivo.-

Ya en la Grecia Clásica se plantearon problemas que tenían que ver con el manejo de infinitas cantidades "infinitamente próximas" a un número.

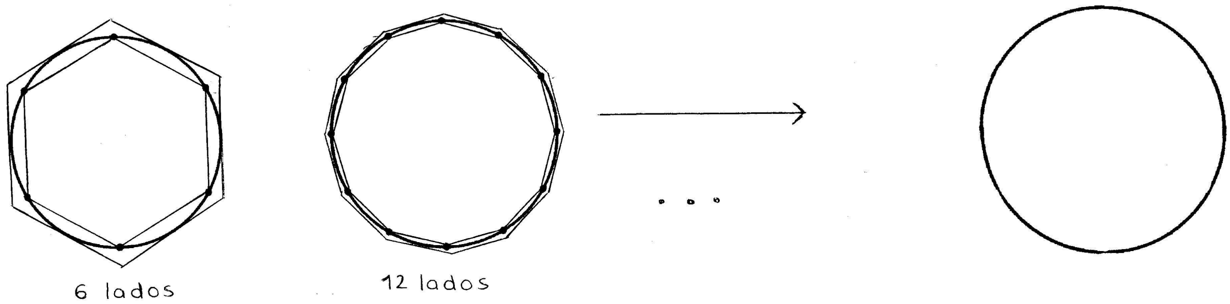
Para poder calcular el **área de un círculo**, los Pitagóricos (s. V a.C.) consideraron a éste como una suma de un número infinito de triángulos infinitamente estrechos, colocados alrededor del círculo de tal manera que su altura se aproxima más al radio cuanto más se reduce la base de dichos triángulos. Al observar que la altura de cada triángulo pasaba a ser el radio del círculo y que la suma de las bases igualaba a la circunferencia, aplicaron como fórmula la siguiente: **área del círculo = ½ · longitud circunferencia · radio**



Un siglo después, la **Escuela Eleática** (de la ciudad de Elea) objetó: Si los triángulos se estrechan infinitamente, en algún momento dejan de ser triángulos; entonces ya no son algo, sino nada. ¿Cómo una suma de nadas puede producir algo?

El más famoso filósofo eleático, **Zenón**, planteó la célebre **Paradoja de Aquiles y la Tortuga**, que con razonamientos parecidos negaba que pudiera existir el movimiento. Más adelante la estudiaremos.

Como aún no se conocía el número B, **Arquímedes de Siracusa** (287 a 212 a C.) calculó la longitud de la circunferencia así: comenzó con dos hexágonos regulares, inscrito y circunscrito en una circunferencia y calculó sus perímetros. La circunferencia mide un número comprendido entre ellos. Después duplicó el número de lados, obteniendo dos dodecágonos. Ahora la circunferencia se acerca aún más a los dos perímetros, estando entre ambos. Y siguió así, duplicando el número de lados hasta llegar a 96.



De este modo consiguió aproximar mucho la longitud de la circunferencia. Y aplicó métodos análogos para longitudes y áreas con otras curvas.

A esta forma de razonar por aproximaciones sucesivas se le llamó **método exhaustivo**.

Este método volvía a ser utilizado en el s. XVII para **aproximar números irracionales**. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

Y para el famoso "número de oro", Φ:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Se cuenta que **Kepler** también utilizó el método exhaustivo para calcular el volumen de toneles de vino (técnica llamada Doliometría), aproximándolo mediante cilindros y troncos de conos. Y que lo hizo para resolver un problema práctico que se le había sido planteado organizando el banquete de la boda con su segunda esposa: ¿cuál es la forma de un tonel que permite almacenar un mayor volumen, con la misma superficie (madera)?

Aquiles y la tortuga.-

Mitología griega: Aquiles fue un héroe troyano invulnerable, según la leyenda, debido a que su madre, para hacerle invencible lo llevó a la laguna Estigia, morada de Medusa, y lo sumergió en sus aguas sujeto por el talón. Como su talón fue lo único que no se mojó, éste era su único punto débil... el Talón de Aquiles.

Famoso por sus grandes cualidades físicas, Aquiles fue elegido por Zenón de Elea como protagonista de la famosa **Paradoja.** Esta es una versión adaptada para facilitar su resolución intuitiva:

> *Aquiles, el atleta más veloz, capaz de correr los 100 m. en 10 segundos, no podrá alcanzar a una lenta tortuga, diez veces menos rápida que él. Ambos disputan una carrera, concediendo Aquiles una ventaja de 100 m. a la tortuga. Cuando Aquiles ha cubierto esos 100 m., la tortuga se ha desplazado 10 m. Al cubrir Aquiles esos 10 m., la tortuga se ha desplazado 1 m. Mientras cubre ese metro que le separa de la tortuga, ésta ha recorrido 0'1 m. Y así indefinidamente.*
> *Así, Aquiles debe cubrir infinitos trayectos para alcanzar a la tortuga. Por lo tanto, Aquiles deberá cubrir una distancia infinita, para lo cual necesitará un tiempo infinito. De tal manera que el desgraciado Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.*

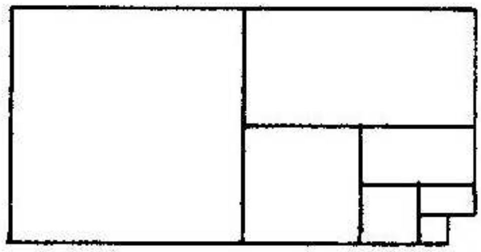
Es evidente que esta paradoja, bajo una apariencia de razonamiento correcto, esconde algún fallo... todos sabemos que Aquiles debe alcanzar a la tortuga. Pero se tardó 24 siglos en desvelar por completo, gracias a la Teoría de Límites, cuál era el fallo: la suposición de que infinitos trayectos deben sumar una distancia infinita y necesitan un tiempo infinito no es correcta.

La Paradoja de Zenón ha trascendido lo matemático para ser una cita cultural universal, también en Literatura:

> *"Por fin, según el cable, la semana pasada la Tortuga llegó a la meta. En rueda de prensa declaró modestamente que siempre temió perder, pues su contrincante le pisó todo el tiempo los talones.*
> *En efecto, una diezmilmillonésima de segundo después, como una flecha y maldiciendo a Zenón de Elea, llegó Aquiles".*
>
> *La Tortuga y Aquiles* - Augusto Monterroso

O incluso en el Cine, en una escena de la película *El genio del amor*. Enlace: http://www.youtube.com/watch?v=OvqqjIRf_NQ).

Un ejemplo aclarador **-** Si todavía te cuesta admitir que la suma de infinitos números puede ser un número finito, piensa en una hoja de papel (1). Le quitamos la mitad (1/2). A su vez, a la mitad restante le quitamos su mitad (1/4). Al trozo que queda (1/4), también le quitamos su mitad (1/8). Y así sucesivamente, de forma indefinida. Como siempre queda algo de papel, siempre se puede continuar cortando.



Piensa ahora en la suma de los infinitos trozos de papel que vamos quitando:

1 / 2 , 1 / 4 , 1/8 , 1/16 , 1/ 32 ...

¿Cuál es su suma?

¡Evidentemente, toda la hoja; es decir 1!

1 / 2 + 1 / 4 +1 / 8 + 1 / 16 + 1 / 32 ... = 1

Solución de la Paradoja de Zenón:

	Posición de Aquiles (m.)	Posición de la tortuga (m.)	Ventaja de la tortuga (m.)	Tiempo empleado (seg.)
Salida	0	100	100	0
1ª etapa	100	100 + 10 = 110	10	10
2ª etapa	100 + 10 = 110	100 + 10 + 1 = 111	1	10 + 1 = 11
3ª etapa	100 + 10 + 1 = 111	100 + 10 + 1 + 0,1 = 111,1	0,1	10 + 1 + 0,1 = 11,1
4ª etapa	100 + 10 + 1 + 0,1 = 111,1	100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 = 111,11	0,01	10 + 1 + 0,1 + 0,01 = 11,11
...	...	...	...	...
Límites	111,1	111,1	0	11,1

En consecuencia: Aquiles alcanza a la tortuga a los 111,1 m. de carrera y emplea en ello 11,1 seg.

El Cálculo Diferencial e Integral

Sobre este panorama de intuiciones, ensayos y necesidades, Newton, Leibnitz y sus sucesores desarrollaron los conceptos de límite, diferencial y derivada. Abordaron los problemas de máximos y mínimos; el cálculo de la tangente a una curva en un punto; el desarrollo en serie polinómica de una función cualquiera; el estudio de las propiedades locales de una función; el problema de la cuadratura o cálculo del área bajo una curva; etc. En particular, se consiguió demostrar la Ley de Caída de los Cuerpos formulada por Galileo.

Con esas poderosas herramientas ya era posible describir y controlar los cambios en los fenómenos naturales. Esto permitió un desarrollo espectacular de las Ciencias Experimentales (s. XVII y XVIII). Luego (s. XIX y XX), la instrumentalización de esas leyes naturales dio lugar a un fantástico despegue de la Tecnología, cuya consecuencia ha sido una radical transformación de la realidad. Gracias a ello, cualquiera de nosotros dispone de un mayor confort que, por poner un ejemplo extremo, Luis XIV, el monarca más poderoso del mundo en tiempos de Newton y Leibnitz.

El Cálculo Diferencial e Integral es una gran obra que contó con esos dos autores. Ambos con grandes mentes que destacaron en varios dominios.

A Newton le debemos, entre otras cosas, la fórmula de la potencia de un binomio, la Teoría de la Luz o la Teoría de la Gravitación Universal. Por su parte, Leibnitz fue además un gran filósofo, fue precursor del sistema de numeración binaria, ingeniero de la primera máquina calculadora capaz de multiplicar e ideador del esquema de la que llamó Máquina Universal, lo que sería siglos después el ordenador.

Pero ambos genios disputaron de forma agria por la autoría del Cálculo Diferencia e Integral. La Historia ha dejado claro luego que ambos las crearon independientemente y que no hubo plagio. La notación (símbolos) que hoy usamos son los ideados por Leibnitz.

En clase conoceréis o repasaréis límites, derivadas, integrales y sus aplicaciones. Recordad entonces estos apuntes históricos que hoy hemos conocido, sabiendo cuántas personas a lo largo de tantos siglos hicieron posible que ahora os llegue a vosotros. Con razón podréis sentiros unos ricos herederos. Tal vez algunos de vosotros en un futuro próximo hagáis crecer esa herencia. No a todos el talento nos ha permitido llegar a tanto, pero sí que para todos es válido este consejo de un gran profesor y matemático, Pedro Puig Adam (1900 – 1960), con el que hoy terminamos:

“Sed un poco aprendices de todo para vuestro bien y, al menos, maestros de algo para bien de los demás”.

Zaragoza, 3 de junio de 2011