DESIGUALDADES

En las olimpiadas de matemáticas es frecuente la aparición de problemas consistentes en la demostración de determinadas desigualdades. Aunque no existe una estrategia general para resolver los problemas de este tipo, frecuentemente en la resolución de estos problemas se pueden usar una serie de desigualdades conocidas, algunas de las cuales se citan a continuación:

1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

   Para todo $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números reales se cumple que:

   $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

   La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real λ tal que $a_i = \lambda b_i$ ($i=1,...,n$)

2. Desigualdad triangular

   Para todo $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales se cumple que:

   $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$

   Esta desigualdad tiene una interpretación geométrica para el caso n=2, si a y b son las longitudes de dos de los lados de un triángulo, la longitud del tercer lado (c) es menor o igual que la suma de las longitudes de esos lados (a+b). Es decir, dado un triángulo de lados a,b,c se cumple que:

   $c < a+b$
   $a < b+c$
   $b < a+c$

3. Desigualdades con las medias

   Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales positivos, entonces:

   $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$

   La primera expresión $\sqrt{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}}$ es lo que se denomina media cuadrática .

La segunda expresión $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ es la media aritmética.

La tercera expresión $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ es la media geométrica.

La última expresión $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$ es la media armónica (es la inversa de la media aritmética de los inversos).

La igualdades se cumplen si y solo si $a_i = a_j$ para todo $1 \leq i,j \leq n$

4. Desigualdad entre fracciones

   Dado un conjunto de fracciones $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2},...,\frac{a_n}{b_n}$ que cumplen que $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq ... \leq \frac{a_n}{b_n}$ se cumple que:

   $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$

5. Desigualdad de Bernouilli

   Sea $h > -1$ y n un número natural, entonces se cumple que :

   $(1+h)^n \geq 1+nh$

6. Desigualdad de Nesbitt

   Sean a,b,c números reales, se cumple que:

   $(\frac{a}{b+c}) + (\frac{b}{c+a}) + (\frac{c}{a+b}) \geq \frac{3}{2}$

Geometría

Sobre el triángulo

En todos los teoremas que siguen tenemos un triángulo $\triangle ABC$, los ángulos respectivos los denotamos por α, β, γ y los lados opuestos tienen longitudes a, b, c. R denota el radio de la circunferencia circunscrita, r el de la inscrita, $h_a, \ldots$ la longitud de la altura correspondiente al lado a, $m_a, \ldots$ la mediana relativa al lado a, (ABC) el área del triángulo, s el semiperímetro, I el incentro, O el circuncentro, H el ortocentro y G el baricentro.

Definiciones.

- El **circuncentro** es el punto de intersección de las **mediatrices** de los lados. Observar que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento. Utilizando este hecho es fácil ver que las mediatrices se intersecan en un punto y que el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.
- El **ortocentro** es el punto de intersección de las **alturas** del triángulo. La existencia del ortocentro se puede deducir del hecho de que este punto coincide con el circuncentro del triángulo que se obtiene al trazar las rectas paralelas a los lados por los vértices opuestos.
- El **incentro** es el punto donde se cortan las **bisectrices**. Este punto equidista de cada lado porque la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo; de modo que el incentro es el centro de la circunferencia inscrita.
- El **baricentro** o centro de gravedad es la intersección de las **medianas** del triángulo. La distancia del baricentro a cada vértice es $2/3$ de la longitud de la mediana asociada (por ejemplo, $AG = 2/3m_a$). Este hecho se usa para demostrar la concurrencia de las medianas.

Nota. El ortocentro, el baricentro y el circuncentro se encuentran en una recta (**recta de Euler**). El baricentro divide la distancia del ortocentro al circuncentro en la razón 2:1 (es decir, $HG = 2GO$).

Desigualdad triangular.

$$a + b > c.$$

En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados es estrictamente mayor que el tercero. Para ver que tres números positivos pueden ser los lados de un triángulo basta ver que el mayor de ellos es menor que la suma de los otros dos.

Teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R.$$

De aquí obtenemos que a un ángulo mayor le corresponde un lado mayor.

Teorema del coseno.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b\,\cos\gamma.$$

Luego el ángulo γ es agudo si y sólo si $c^2 < a^2 + b^2$ y es obtuso si y sólo si $c^2 > a^2 + b^2$. Cuando $\gamma = 90$, obtenemos el teorema de Pitágoras.

Fórmulas para el área.

$$(ABC) = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}a\,b\,\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s\,r = \frac{abc}{4R}.$$

Semejanza. Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los triángulos son semejantes. Cuando dos triángulos son semejantes, sus lados, alturas, medianas, bisectrices, el radio de la circunferencia inscrita y el de la circunscrita son proporcionales. Si esa constante de proporcionalidad es k, entonces la relación entre las áreas de los triángulos es k^2. Otros criterios de semejanza son:

- Un ángulo igual y los lados adyacentes proporcionales.
- Los tres lados proporcionales.

Sobre la circunferencia.

Teorema (Potencia). Si dos rectas desde un punto P cortan a la circunferencia en los puntos A y A' (que pueden coincidir) y B y B' (que pueden coincidir), respectivamente, entonces

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'.$$

Teorema. Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico (es decir, existe una circunferencia circunscrita al cuadrilátero) si y sólo si $\angle ACB = \angle ADB$ y si y sólo si $\angle ADC + \angle ABC = 180$.

Teorema de Ptolomeo. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Teorema. Un cuadrilátero tiene una circunferencia inscrita si y sólo si las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto (incentro). Otra condición equivalente es que la suma de los lados opuestos coincida. A estos cuadriláteros se les llama tangenciales.

Otros Teoremas.

Teorema de la bisectriz. Si la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ interseca al lado AB en el punto D, entonces

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}.$$

Teorema de Ceva. AD, BE, CF son isogonales concurrentes en $\triangle ABC$ si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

(Una **isogonal** es una recta que une un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.)

Teorema de Menelao. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y X, Y, Z puntos de las rectas BC, CA, AB. Entonces X, Y, Z están alineados si y sólo si

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

Teorema de Pappus. Si A, C, E son tres puntos de una recta, B, D, F de otra y si las tres rectas AB, CD, EF cortan a DE, FA, BC, respectivamente, entonces los tres puntos de intersección están alineados.

Teorema de Desargues. Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, y sus pares de lados correspondientes se cortan, entonces los tres puntos de intersección están alineados.

Teorema de Pascal. Si los seis vértices de un hexágono están situados en una circunferencia y los tres pares de lados opuestos se cortan, entonces los tres puntos de intersección están alineados.

Teorema de Brianchon. Si los seis lados de un hexágono son tangentes a una circunferencia, las tres diagonales se cortan en un punto (o son paralelas).

Teorema (Recta de Simson). Los pies de las perpendiculares desde un punto a los lados de un triángulo están alineados si y sólo si el punto está situado en la circunferencia circunscrita.

Teorema (Circunferencia de los nueve puntos). Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro, están todos en una misma circunferencia. El radio es $\frac{1}{2}R$ y el centro está situado en la recta de Euler, equidistante del ortocentro y del circuncentro.

Teorema de Feuerbach. La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a las tres circunferencias tangentes exteriores.