PROBLEMAS

1. Sean r,s,u,v números reales cualesquiera. Probar que:

   mín $\{r\text{-}s^2, s\text{-}u^2, u\text{-}v^2, v\text{-}r^2\} \leq \frac{1}{4}$

   (OME 2005)

2. Demostrar que en un triángulo la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice. (Fase Local 2007.)

3. Prueba que para cualesquiera números reales a,b tales que 0<a,b<1, se cumple la siguiente desigualdad:

   $\sqrt{ab^2+a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2+(1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}$

   (OME 2008)

4. ABC es un triángulo isósceles con AB=AC. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$. (OME 2006.)

5. Sean a,b,c números reales positivos tal que abc=1. Probar que:

   $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

   (IMO 1995)

6. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple

   $$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc.$$

   (OME 2007)

7. Sea a$\neq$1 un número real positivo y n un entero positivo. Demostrar que $\mathrm{n}^2 < \frac{a^{\mathrm{n}}+a^{-\mathrm{n}}-2}{a+a^{-1}-2}$

   (OME 2007)

8. En un triángulo acutángulo ABC, con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz de A con BC y sea D el pie de la altura desde A a BC. Si E y F son las intersecciones de la circunferencia circunscrita a AVD con CA y AB, respectivamente, mostrar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

9. Sean a,b,c números reales positivos tal que abc=1. Prueba la desigualdad siguiente:

   $(\frac{a}{1+ab})^2+(\frac{b}{1+bc})^2+(\frac{c}{1+ca})^2 \geq \frac{3}{4}$

   (OME 2009)

10. Una circunferencia Γ_2 es tangente interiormente a la circunferencia Γ_1 circunscrita al triángulo PAB en P y al lado AB en C. Sean E y F la intersección de Γ_2 con los lados PA y PB, respectivamente. Sea D el punto de intersección de EF con PC. Las rectas PD y AD intersecan de nuevo a Γ_1 en G y H, respectivamente. Probar que F, G, H están alineados.