

¿CÓMO LAS MATEMÁTICAS AYUDAN A TOMAR (¡BUENAS!) DECISIONES?

Carole PERCIER - Lycée Français Molière
caromathiques.moliere@gmail.com

1 Introducción

Todo el mundo se ha preguntado algún día en su clase de matemáticas : “Pero ¿PARA QUÉ SIRVE ESTO???”. Efectivamente, al contrario de la física, de la biología, las matemáticas no parecen -a priori- tener aplicaciones muy concretas.

Sin embargo, no hace falta ser físico u investigador en economía para poder utilizar algún día conceptos estudiados en clase de mates. Las matemáticas están presentes detrás de todas las empresas y, de manera más general, detrás de cada entidad que necesita un mínimo de organización como por ejemplo los hospitales. Son las matemáticas que permiten a estas entidades funcionar de una manera óptima (o por lo menos, intentarlo...) y que les ayudan a tomar las mejores decisiones en cuanto a su organización.

Obviamente, tomar decisiones sobre la organización de una empresa con las matemáticas no se puede hacer en una reunión de debate alrededor de la pregunta “¿cuántas camas pensáis que necesitamos en el servicio de pediatría?” y decidirlo según el humor del día. Si las matemáticas pueden ayudar a tomar una decisión en cuanto a esta pregunta, es que se esconden matemáticas detrás de ella. Por eso, la primera etapa en la ayuda a la toma de decisiones es la modelización de problemas, para transformar preguntas en problemas matemáticos.

El deber de los logísticos :

“El buen producto, en el buen sitio, en el buen momento.”

¿Tan fácil?

EJ. : Un supermercado propone entre 50 000 y 80 000 referencias de productos. Auchan (el Al Campo francés) trata con más de 7 000 proveedores distintos, en todo el país. Las exigencias de los clientes no son constantes, la meteorología no se controla, etc. ¿Cómo, en estas condiciones, traer la mercancía en las filas del supermercado en los mejores plazos?

- ¿Qué optimizar?
- ¿Qué tener en cuenta?
- RESOLVER !!!!!!!!!!!!!

2 Modelización

2.1 ¿Qué es un modelo?

Def. 1

| Traducción de una situación, de un objeto o de una estructura real y de su funcionamiento.

Esta definición puede hacer pensar en la palabra teoría. Sin embargo, la palabra **modelo** tiene una connotación práctica que la teoría no tiene : es una teoría **orientada hacia la acción** para la que se va a utilizar. Permite tener una estimación teórica de una idea, pero con un **objetivo concreto**.

Un objeto → ¿Un único modelo?

El objeto del modelo, no será modelado de la misma manera según el objetivo del problema, la pregunta a la que se quiere contestar. Es la **multiplicidad de los objetivos**.

Luego, tampoco existe una única manera de modelar un problema. Por tanto, un mismo objeto, para un mismo problema, puede ser modelado de distintas maneras. Es la **multiplicidad de los modelos**.

Tipos de modelos

Se diferencian dos grandes familias de modelos : los modelos predictivos y los modelos descriptivos. Los primeros sirven para anticipar la realidad y tomar decisiones, mientras que los segundos sirven para estudiar lo que ha pasado. Sin embargo, los dos se complementan.

2.2 ¿Por qué utilizar modelos?

El objetivo de una organización, siempre será **conseguir un funcionamiento óptimo** : disminuir los costes y aumentar las recetas y/o responder a las necesidades de sus clientes / usuarios.

Para llegar a este funcionamiento óptimo, la empresa tiene que tomar una serie de decisiones. Cada organización tiene su propio funcionamiento, sus propios problemas y por tanto tiene que tomar sus propias decisiones.

Los modelos permiten conseguir la formalización y estructuración del problema. Por tanto, la toma de decisión de la organización -que viene de la resolución del problema matemático asociado- se hace de una manera más objetiva.

Además de la simplificación y formalización del problema y del proceso de toma de decisión, la modelización permite muy a menudo ahorrarse tiempo. Es muy frecuente encontrar similitudes entre problemas que parecen, a priori, distintos : en estos casos, se pueden utilizar modelos ya desarrollados.

Por tanto, existe un conjunto de “tipos de modelos”, más o menos globales, frecuentemente utilizados en organizaciones de todo tipo.

2.3 Creación de un modelo

No existe un “guía de la modelización” que permite construir un modelo idóneo. Sin embargo, las pautas generales que se siguen son las siguientes :

1. Formular la **pregunta** a la que se quiere responder.
2. Limitar el **campo de estudio** del problema.
3. Construir el modelo : recoger y filtrar **datos**.
4. **Validar** el modelo.

En la creación del modelo, se tiene que tener en cuenta algunos puntos esenciales. Un buen modelo tiene que :

- tener en cuenta los distintos aspectos del problema real,
- permitir obtener los resultados deseados en el plazo deseado,
- a poder ser, ser reutilizable. . .

EJ. : Formular la pregunta que se podría asociar a cada una de las situaciones siguientes, determinar cuales serían los datos que se deberían conseguir y buscar una manera de modelar el problema.

- En una consulta médica, el médico se ha dado cuenta que bastantes pacientes no acudían a su cita. Por tanto, se está planteando si empezar a citar varios pacientes al mismo tiempo para evitar quedarse sin atender a nadie (y, por tanto, no ganar tanto dinero como lo que podría. . .).
- Un ebanista tiene cuatro pedidos pendientes para el mes que acaba de empezar :
 - una mesa,
 - 6 sillas,
 - un aparador,
 - una cómoda.

Cada uno de sus clientes le ha impuesto una fecha límite de entrega, por encima de la cual el ebanista tendría que bajar el precio de sus muebles si tuviera retraso. El pobre ebanista trabaja solo, aunque cabe la posibilidad, en caso extremo, de decir a su primo que venga a ayudarlo.

3 Programación lineal

3.1 Objetivo VS. Restricciones

Los problemas de P.L. representan una gran parte de la Investigación Operativa, dado que son fácilmente aplicables a muchos tipos de situaciones.

Un problema de P.L. se basa en :

- unas variables de decisión,
- una función objetivo, que se trata de maximizar/minimizar
- unas restricciones,

formuladas en una serie de expresiones y ecuaciones matemáticas.

$$\begin{aligned} \max \text{ ou } \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \forall i = 1 \dots m : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_i \\ \forall j = 1 \dots n : x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

EJ. : Modelar cada uno de los siguientes problemas :

1. Una empresa acaba de firmar un contrato con el ayuntamiento para el tratamiento de los residuos reciclables : papel, plástico, vidrio.

Sus instalaciones le permiten tratar como máximo :

- 4 toneladas /hora de papel,
- 2 toneladas /hora de plástico,
- 1 tonelada /hora de vidrio.

Su capacidad total de tratamiento es de 5 toneladas de residuos por hora.

El tratamiento del papel le hace ganar 100€ por tonelada, el del plástico 300€ por tonelada y el del vidrio 200€ por tonelada.

La empresa quiere determinar que cantidad de residuos de cada tipo tiene que tratar por hora para obtener un beneficio máximo.

2. Una papelera desea mejorar su proceso de fabricación. El papel utilizado está definido por su ancho y su gramaje. La máquina que fabrica el papel funciona 24h/24. Durante los cambios de papel, es necesario hacer algunas modificaciones y además, los primeros metros de papel no se pueden vender. Se representan estos dos eventos por un coste global para la empresa. La empresa dispone del calendario de las fechas de llegada de las materias primas, y de las fechas de entrega de los pedidos de los clientes.

Pedido i	1	2	3	4	5
Tiempo de fabricación (días) p_i	30	24	21	15	27
Fecha de llegada MP (días) r_i	0	15	15	21	36
Fecha de entrega (días) d_i	150	60	66	105	135

Coste de transición (k€)

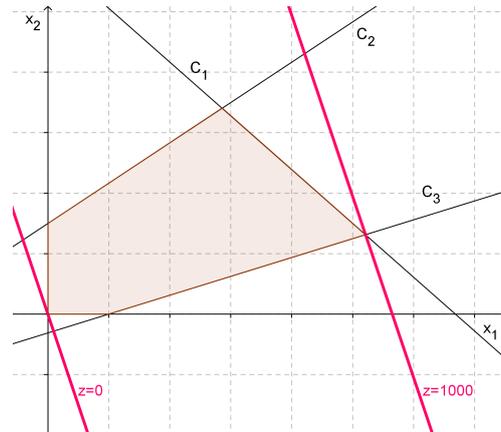
c_{ij}	1	2	3	4	5
1		10	5	8	15
2			1	3	9
3				10	10
4					7

Tiempo de transición (días)

s_{ij}	1	2	3	4	5
1		5	3	4	8
2			1	2	5
3				5	6
4					5

3.2 Encontrar la solución óptima

Gráficamente, se trata de buscar las soluciones factibles : la zona limitada por las restricciones. Una vez la región factible hallada, se ha de buscar cual es la solución que corresponde a la función objetivo.



Un problema de P.L. también se puede resolver algebricamente : se aplica el algoritmo del Simplex, que permite hallar la solución óptima.

EJ. :

- Una fábrica produce dos tipos de productos : el producto A y el producto B . El modelo A exige 2kg de materia prima, necesita 30 horas de fabricación y da un beneficio de 7€. El producto B exige 4kg de materia prima, necesita 15 horas de fabricación y da un beneficio de 6€. Se dispone de 200kg de materia prima y de 1200 horas de trabajo. ¿Cómo organizar la producción para obtener un beneficio máximo?
- En la fabricación de frigoríficos de tipo $A+$ y $A++$ se pueden utilizar dos tipos de máquinas-robots : M_1 y M_2 . Cada unidad de la máquina M_1 tiene un coste de 2000€ y cada unidad de la máquina M_2 tiene un coste de 3000€.

La tabla siguiente muestra las unidades que se pueden obtener, en un cierto período de tiempo, de frigoríficos $A+$ y $A++$ tanto en la máquina M_1 como en la M_2 :

	$A+$	$A++$
M_1	2	3
M_2	1	3

En este período, se deben producir al menos 11 frigoríficos $A+$ y 24 $A++$.

La empresa que proporciona las máquinas no considera pedidos con menos de dos unidades de la M_1 y con menos de tres unidades de la M_2 . Además, por razones de transporte, el número de unidades de M_2 debe ser superior al de M_1 .

¿Cuántas máquinas de cada tipo la empresa tendría que adquirir?

3.3 Planificación de tareas

Planteamiento del problema :

La planificación de tareas consiste en planificar unas tareas teniendo en cuenta :

- el número de recursos disponibles y su organización
- tiempos de realización
- fechas de disponibilidad
- fechas límites

Los objetivos pueden variar, en función de la política de la organización y de las exigencias de los clientes :

- Minimizar el tiempo total de realización de todas las tareas
- Minimizar el número de tareas en espera

- Minimizar la cantidad de recursos utilizados
- ...

Al principio, esta rama de la investigación operativa se aplica sobretodo a talleres de producción (¿cómo optimizar el uso de las máquinas y de los trabajadores?), pero se puede aplicar a muchos otros campos.

EJ. : Se considera un aeropuerto con un número determinado de puertas de embarque. Los aviones llegan y se van según un horario establecido. Cuando un avión está por llegar, se le debe asignar una puerta adecuada tanto para los pasajeros como para el personal. Algunas puertas pueden ser asignadas únicamente a aviones pequeños.

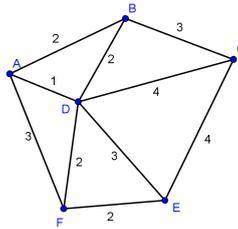
- ¿Recursos?
- ¿Restricciones?
- ¿Objetivo?

3.4 Problemas típicos

Una de las ventajas de la modelización es la “universalidad” de los modelos. Efectivamente, muchísimas organizaciones se enfrentan al mismo tipo de problemas, y solo los datos (costes, efectivos, etc.) cambian. Los problemas que siguen son problemas clásicos de empresas, asociaciones, administraciones que han sido modelados y para los cuales existen métodos de resolución.

Problema del viajante de negocios

Un viajante de negocios tiene que ir a visitar todos sus clientes, en un recorrido de distancia mínima, y volver a su punto de partida.



Modelar este problema con un programa de P.L.

Problema de la mochila

Mi mochila no puede soportar más que W kilos. Tengo n objetos, cada uno pesa w_i kilos y tiene un valor de p_i euros. ¿Qué objetos elegir para llevar conmigo un conjunto de objetos que tiene un valor lo más alto posible, pero no sobrepasa el peso límite?

Modelar este problema con un programa de P.L.

Problema de transporte

Una empresa dispone de :

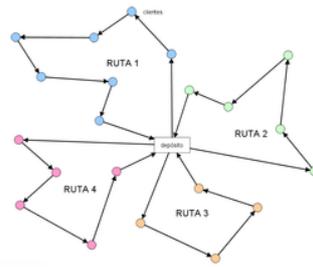
- m fábricas, cada uno produce a_i productos,
- n almacenes, cada uno necesita b_i productos.

¿Qué cantidad de productos de la empresa i mandar al almacén j ?

Modelar este problema con un programa de P.L.

Problema del ruteo de vehículos - VRP

Una flota de vehículos tiene que pasar a dar servicios a todos sus clientes, con un coste mínimo.



Modelar este problema con un programa de P.L.

4 Otras técnicas de ayuda a la toma de decisiones

4.1 Métodos exactos VS. Métodos heurísticos

- Problema del viajante
- Problema de la mochila
- Problema de transporte
- Problema de ruteo
- ...

→ Problemas difíciles

⇒ Imposibilidad de resolverlos de manera exacta

⇒ Utilización de **métodos heurísticos**

Def. 2

Una heurística es un algoritmo que permite encontrar rápidamente una solución factible pero no necesariamente óptima a un problema de optimización "NP-difícil".

Dificultad :

Modelización + Algoritmos + Comparación de resultados

4.2 Decisión e incertidumbre

No existe ninguna organización que esté segura de todo lo que le va a pasar. Todas están sujetas a distintos tipos de riesgos :

- Máquina averiada, personal enfermo,
- proveedor con retraso,
- inestabilidad de la población, fiabilidad de los clientes
- ...

No se puede prever el futuro, pero sí se puede anticipar. Por eso, se requiere muy a menudo la combinación de la P.L. y de la estadística y probabilidad.

- Simulación
- Programación estocástica
- Procesos de decisiones Markovianos

Aplicaciones :

- Filas de espera → muchas aplicaciones en el ámbito de la salud
- Gestión de los stocks
- Mantenimiento de máquinas

EJ. : Dada la aumentación del número de pacientes que no acuden a una cita, un médico se plantea si empezar a citar varios pacientes a la vez (overbooking). Buscar una manera de ayudarlo a tomar su decisión.

4.3 Decisión multi-criterios

La decisión multicriterios toma en cuenta distintos puntos de vista, elaborados por expertos, y consiste en construir un modelo de decisión basándose en ellos y utilizar el modelo sobre distintas alternativas.

EJ. :

- N días
- N ciudades
- 2 actividades al día en cada ciudad
- hoteles de distintas categorías

Restricciones :

- Distancia máxima entre 2 ciudades consecutivas
- Distancia máxima total

Objetivos ???

5 Conclusión

Todo esto...¿para qué?

Pocas empresas disponen de matemáticos que desarrollan modelos exclusivamente para ellas (pero existen). Sin embargo, algunas empresas y centros de investigación se dedican exclusivamente a esto :

- Softwares que incluyen muchas de estos modelos (tipo SAP)
- Consulting en empresas
- Investigación en el ámbito de la investigación operativa y de la modelización : necesita aplicaciones → las empresas