DE RECTÁNGULOS Y HEXÁGONOS

Antonio M. Oller Marcén

Investigar es ver lo que todo el mundo
ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado.
Albert Szent Gyorgi

Introducción

El punto de partida de este trabajo está en una actividad realizada por el autor con estudiantes de 3º y 4º de E.S.O. durante el curso 2006-2007 en el “Taller de Talento Matemático” (www.unizar.es/ttm) coordinado por la Universidad de Zaragoza.

Tratar de motivar la utilidad didáctica de la papiroflexia dentro del aula de matemáticas puede parecer innecesario por lo evidente. La gran variedad de actividades distintas dirigidas a los más diversos niveles (ver Hull (2006), Baena (1991), Royo (2002) o la página web Divulgamat[1], por ejemplo) hacen que sea una herramienta muy a tener en cuenta a la hora de trabajar aspectos de la geometría que van desde la semejanza de triángulos hasta los poliedros, pasando por las teselaciones del plano o el Teorema de Pitágoras[2]. A esta variedad hay que añadir el hecho de ser una actividad manipulativa, lo que hace que el alumno *vea y toque* las construcciones. Esta proximidad del alumno con el objeto matemático favorece la propuesta de problemas abiertos, facilitándose así un proceso de investigación en el que el alumno puede formular de manera natural sus propias conjeturas. Además el mismo proceso manipulativo da a menudo las claves que llevarán a la posible demostración de dichas conjeturas.

La actividad consiste en el análisis de una cierta construcción geométrica llevada a cabo doblando papel. En concreto nos centramos en analizar la forma de la figura obtenida, las longitudes de sus lados y el área de la misma. Se estudian, pues, tres aspectos geométricos importantes: forma, longitud y área. Hemos elegido estos aspectos, además de por su importancia intrínseca, porque nos permiten introducir distintas técnicas y formas de argumentación. Así en el estudio de la forma las argumentaciones están basadas en la simetría de la construcción, en la parte dedicada a las longitudes el tratamiento y las técnicas son más algebraicas y analíticas e involucran aspectos métricos y, por último, el estudio del área involucrará los dos aspectos anteriores. Esta multiplicidad en las técnicas empleadas hace que podamos elegir distintos aspectos de la actividad para trabajar en distintos niveles según a quienes deseemos dirigir la actividad.

No se ha pretendido en ningún caso presentar una actividad cerrada ni completamente resuelta y terminada. La idea es que pueda servir como guía y punto de partida de modo que cada persona que se decida a emplearla pueda darle sus propios matices y seguir sus propios caminos. Con la esperanza de poder cumplir este objetivo comenzamos.

La construcción

Tomamos un rectángulo de papel. De momento nos despreocupamos del tamaño del mismo (y más en concreto de la proporción entre sus lados). Marcamos el centro del rectángulo por cualquier método que se nos ocurra; por ejemplo dibujando las diagonales y marcando su punto de corte o (preferiblemente) doblando el papel por la mitad horizontal y verticalmente. Una vez marcado el centro hacemos cuatro dobleces de manera que cada una de ellas lleva una de las esquinas del rectángulo sobre el centro del mismo[3] (ver figura 1).

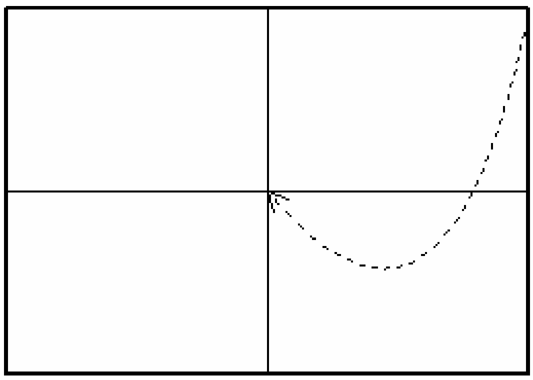

Figura 1: Uno de los cuatro pliegues iniciales.

La pregunta es clara:

¿Qué podemos decir sobre la figura que surge al realizar esta construcción?

Un caso particular

Cuando nos enfrentamos a una pregunta abierta como la anterior suele ser útil analizar lo que sucede en un caso particular. Así, podemos intentar ver qué sucede cuando el rectángulo del que partimos es un cuadrado (ver figura 2). En este caso lo que obtenemos al plegar es, sencillamente, otro cuadrado[4].

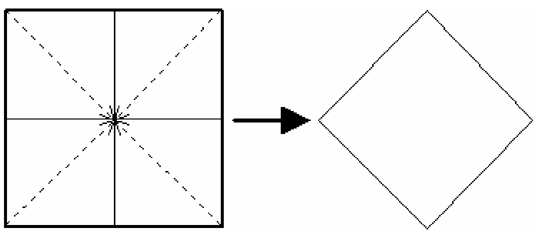

Figura 2: De un cuadrado a otro.

Este primer ejemplo nos hace sospechar que la proporción en la que se encuentran los lados del rectángulo original va a jugar un papel importante a la hora de analizar la situación. Teniendo esto en cuenta, podremos suponer en lo sucesivo que uno de los lados del rectángulo de partida tiene longitud 1 mientras que el otro tiene una longitud l cualquiera (mayor que 1). Es interesante observar que esta suposición no es restrictiva puesto que en caso contrario bastaría con que los lados intercambien sus papeles; es decir, con rotar el rectángulo 90º para volver a la situación anterior.

La forma

Si realizamos los cuatro pliegues indicados en la construcción según la figura 1 y a continuación los desplegamos obtendremos algo similar a lo mostrado en la siguiente figura.

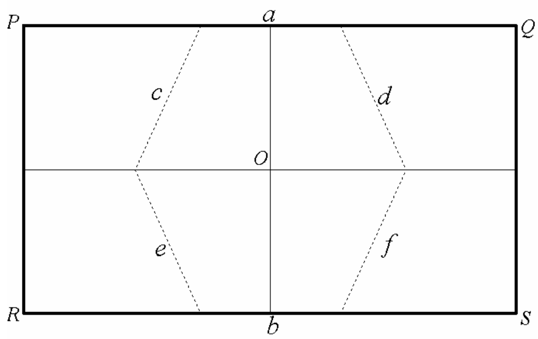

Figura 3: La figura obtenida tras la construcción.

En la figura anterior la arista c surge al plegar P sobre O, la arista d al plegar Q sobre O y así sucesivamente. Parece claro que el polígono obtenido es un hexágono, para justificarlo basta con asegurarse de que las líneas c y e se cortan sobre la mediatriz horizontal del rectángulo y que lo mismo hacen d y f, pero esto puede razonarse gracias a que por construcción dicho polígono va a tener en dicha mediatriz un eje de simetría.

Aún podemos decir algo más sobre este rectángulo. En primer lugar la simetría horizontal que acabamos de mencionar hace que $a=b$ y por idéntico motivo se tiene que $c=e$ y que $d=f$. Por otra parte, y también por construcción, se observa que el polígono obtenido posee en la mediatriz vertical del rectángulo un eje de simetría. Esto hace que $c=d$ y que $e=f$.

En resumen, hemos obtenido un hexágono "casi-regular": los lados opuestos son iguales ($a=b$, $c=f$, $d=e$) y además cuatro de ellos son iguales entre sí ($c=d=e=f$).

Longitudes

Tras analizar la forma del polígono obtenido vamos a centrarnos en el cálculo de las longitudes de sus lados. Comenzaremos analizando el caso en que, al realizar uno de los cuatro pliegues, la situación final es como la de la figura 4. Las condiciones sobre la proporción de los lados con las que concluimos el apartado anterior se traducen cuantitativamente en que $OR=1/2$ y en que $PQ=l/2$.

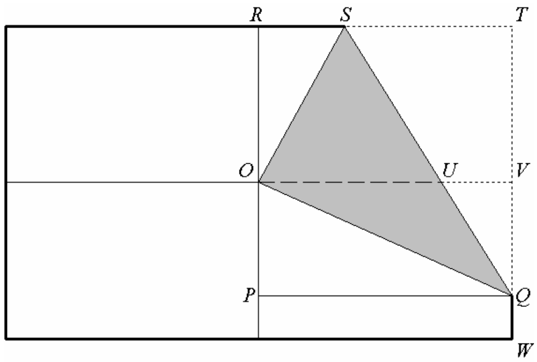

Figura 4: El rectángulo original tras uno de los cuatro pliegues.

Notar que, para que se de esta situación, debe cumplirse que el segmento QW aparezca. Nuestro primer objetivo será pues determinar qué condiciones deben darse para que esto ocurra. Para ello nos centramos en el triángulo ΔOPQ. Si llamamos $QW=y$, entonces es claro que $OQ=QT=1-y$ y que $OP=1/2-y$. Además ΔOPQ es rectángulo; por lo que, aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$(1-y)^2 = \left(\frac{1}{2}-y\right)^2 + \frac{l^2}{4}$$

de donde, sin más que despejar, se tiene $y=\frac{3-l^2}{4}$. Así pues, para que la situación al doblar sea como la de la figura 4, hemos de exigir que $l \leq \sqrt{3}$. Parece pues necesario distinguir dos casos a la hora de analizar la situación. El primero corresponderá a $l \leq \sqrt{3}$ y el segundo a la situación contraria, es decir, a $l > \sqrt{3}$.

- Caso $l \leq \sqrt{3}$:

Si continuamos plegando el rectángulo original del mismo modo, obtendremos primeramente una situación como la de la figura 5.

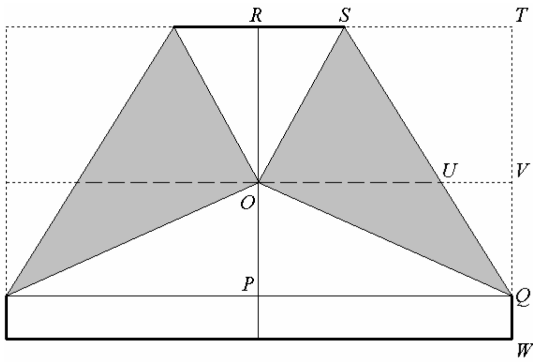

Figura 5: El rectángulo tras dos pliegues.

Por último, y tras doblar las dos esquinas inferiores, se llega a algo similar a lo mostrado en la figura 6 (un hexágono según se razonó en la sección anterior).

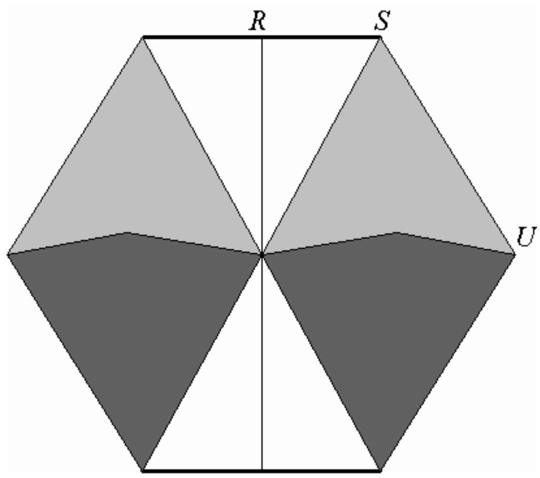

Figura 6: La situación final tras los cuatro pliegues.

Para calcular las medidas de los lados de este hexágono nos basta con encontrar las medidas *SU* y 2*RS*. Seguiremos la notación indicada en la figura 4. En primer lugar llamamos *RS*=*x* y observamos que *OR*=1/2 y que *OS*=l/2–*x*; además, como el triángulo Δ*ORS* es rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

y despejando, que 2*RS*=2*x*=$\frac{l^2-1}{2l}$.

Calcular *SU* nos llevará algo más de trabajo. Comenzamos aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo Δ*QST*. Así, se tiene que:

$$QS^2 = ST^2 + QT^2 = \left(\frac{l}{2} - 2\right)^2 + (1-y)^2$$

y de aquí, sustituyendo los valores que hemos obtenido para x e y, tenemos que QS=$\frac{(l^2+1)\sqrt{l^2+1}}{4l}$.

Ahora observamos que los triángulos ΔQST y ΔQUV son semejantes. Por tanto se tiene que $\frac{QS}{SU} = \frac{QT}{TV}$, como QT=1–y y TV=1/2, despejando y sustituyendo se tiene que SU=$\frac{\sqrt{l^2+1}}{2l}$. Es interesante observar que en este caso se tiene que $SU \geq 2RS$.

- Caso $l > \sqrt{3}$:

Hasta ahora nos hemos centrado en el caso $l \leq \sqrt{3}$, además de por la mayor sencillez de los cálculos hemos fijado esa restricción para que el hexágono se obtenga después de haber plegado las cuatro esquinas y quede – digamos – a la vista.

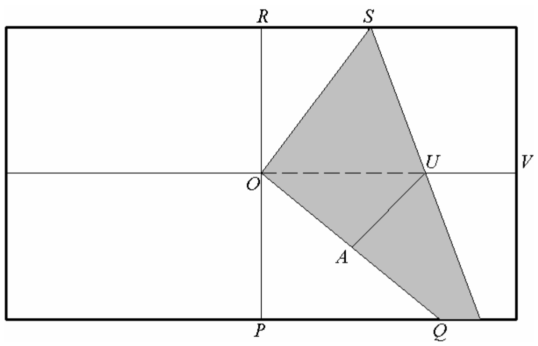

Figura 7: El rectángulo original tras uno de los cuatro pliegues.

Si tomamos, sin embargo, un rectángulo en el que la proporción entre los lados sea mayor que $\sqrt{3}$ obtendremos algo similar a lo mostrado en la figura 8.

La diferencia con respecto al caso anterior salta a la vista. En este caso una vez realizados los dos primeros pliegues (el de la figura 8 y el de la esquina superior izquierda, que es simétrico) no podemos llevar las esquinas inferiores sobre el centro porque éstas han “desaparecido”. En este caso, para hacer aparecer el hexágono (ver figura 9) hemos de desdoblar cada uno de los cuatro pliegues. El hexágono quedará “dibujado” sobre el rectángulo de partida.

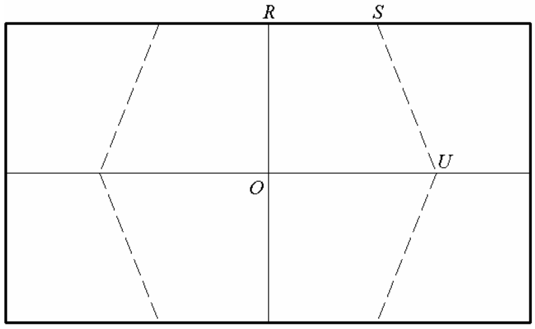

Figura 8: El hexágono "dibujado".

Al igual que en el caso anterior nos proponemos calcular las medidas de los lados del hexágono, a saber, 2*RS* y *SU*. Seguiremos la notación presentada en la figura 8.

En primer lugar llamamos *RS*=*x* y observamos que *OR*=1/2 y que *OS*=*ST*=l/2–*x*; además, como el triángulo Δ*ORS* es rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)^2=x^2+\frac{1}{4}$$

y despejando, que 2*RS*=2*x*=$\frac{l^2-1}{2l}$. Notar que este valor coincide con el obtenido en el caso anterior.

Encontrar el valor *SU* es algo más complicado en este caso. En primer lugar observamos que los triángulos Δ*ORS* y Δ*QPO* son semejantes y así se tiene que $\frac{RS}{OS}=\frac{PO}{QO}$. Si despejamos y empleamos el valor de *RS* que acabamos de obtener, se tiene que $QO=\frac{l^2+1}{2\left(l^2-1\right)}$.

Ahora, también los triángulos Δ*QPO* y Δ*OAU* son semejantes; de donde se sigue que $\frac{AU}{OU}=\frac{PO}{QO}$.

Observamos que *AU*=*UV*=*l*/2–*OU*, teniendo esto en cuenta junto con el valor de *QO* recién obtenido podemos despejar y obtener que *OU*=$\frac{l^2+1}{4l}$.

Por último podemos aplicar el Teorema del Coseno al triángulo Δ*OSU* para obtener:

$$SU^2=OU^2+OS^2-2OU\cdot OS\cdot\cos(\angle UOS)$$

En esta expresión los valores *OU* y *OS* son conocidos y además $\cos(\angle UOS)=\cos(\angle OSR)=\frac{RS}{OS}=\frac{l^2-1}{l^2+1}$. Sustituyendo se obtiene el valor buscado *SU*=$\frac{\sqrt{l^2+1}}{2l}$.

Notar que también en este caso el valor coincide con el obtenido en el caso anterior; sin embargo, en este caso lo que se cumple es que 2*RS*>*SU*.

- El caso $l=\sqrt{3}$:

Un aspecto interesante puede ser estudiar cuándo el hexágono que obtenemos es regular. Claramente esto sucederá siempre que 2*RS*=*SU*, es decir, cuando se cumpla:

$$\frac{l^2-1}{2l}=\frac{\sqrt{l^2+1}}{2l}$$

Operando de manera sencilla se obtiene que el único valor con sentido que satisface esta ecuación es $l=\sqrt{3}$. Es decir, si partimos de un rectángulo cuyos lados esté en proporción $\sqrt{3}$ y plegamos sus cuatro esquinas llevándolas sobre el centro del mismo, obtendremos como resultado un hexágono regular. Notar que este caso constituye el punto de separación entre los dos casos que hemos considerado anteriormente.

- La proporción entre los lados:

En la figura 9 se ha representado gráficamente la proporción $\frac{SU}{2RS}$ entre los lados del hexágono en función de la proporción *l* entre los lados del rectángulo de partida.

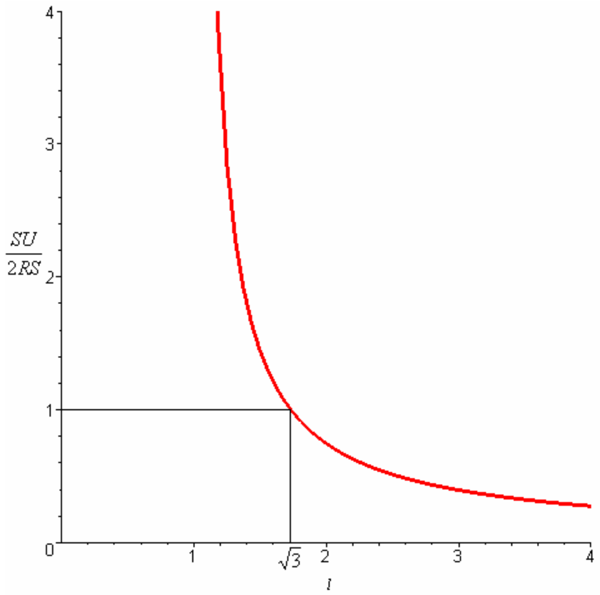

Figura 9: La proporción entre los lados del hexágono.

Recordar que teníamos la condición $l\geq 1$. Además en el caso *l*=1 obteníamos un cuadrado en lugar de un hexágono (el segmento *RS* era nulo en este caso) y por eso la función no está definida en este punto. En la gráfica hemos marcado el punto “frontera” entre las dos situaciones consideradas, el caso $l=\sqrt{3}$, en el que se obtenía un hexágono regular; es decir, en el que las medidas de los lados *SU* y *2RS* son iguales.

Como ya se indicó, si $l \leq \sqrt{3}$ el lado *SU* es mayor o igual que el lado *2RS* y lo contrario sucede si $l < \sqrt{3}$.

El área

Vamos a tratar de calcular el área del hexágono obtenido en función de la del rectángulo original. Recordar que partíamos del supuesto de que los lados de dicho rectángulo tenían valores 1 y *l*, por lo que su área tiene el valor *l*.

En primer lugar indicamos que, sin más que calcular ambos valores explícitamente empleando técnicas similares a las de la sección anterior, es fácil ver que *RS=UV*.

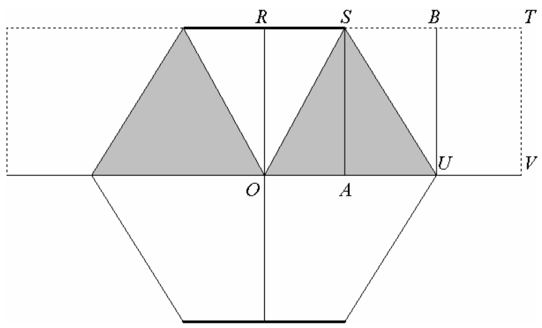

Figura 10: Calculando el área.

Si nos fijamos en la figura 7, puesto que acabamos de indicar que *RS=UV*, resulta que el área del rectángulo *ORSA* coincide con la del *UBTV*. Además, claramente las áreas de los triángulos ΔASU y ΔSUB son iguales. De todo esto se deduce que el área del trapecio *ORSU* es la mitad que la del rectángulo *ORTV*. Finalmente basta observar que el área del trapecio *ORSU* es la cuarta parte de la del hexágono y que la del rectángulo *ORTV* es la cuarta parte de la del rectángulo original, para concluir que el área del hexágono es exactamente la mitad que la del rectángulo original; es decir, *l*/2.

Este hecho en interesante puesto que si pensamos en un proceso dinámico en el que partimos de un cuadrado de área unidad y vamos aplanándolo de manera continua y de forma que el área se mantenga constante obtendremos toda una familia de rectángulos de área unidad. Si a cada uno de estos rectángulos le aplicamos la construcción anterior obtendremos toda una familia de hexágonos (excepto el primero de ellos que será un cuadrado) "casi-regulares" como los descritos anteriormente (cuando la proporción entre los lados del rectángulo sea $\sqrt{3}$ el hexágono será regular). La particularidad es que todos estos hexágonos poseen la misma área (en este caso ½).

Recubriendo el plano

Un aspecto interesante al respecto de los hexágonos que hemos construido es que nos permiten embaldosar el plano sea cual sea el rectángulo de partida.

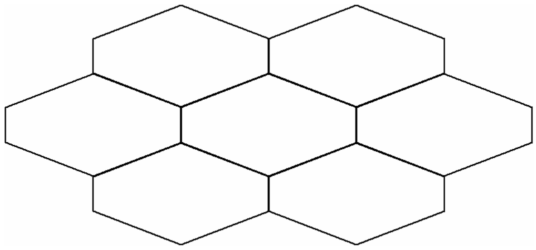

Figura 11: Teselando el plano.

Se puede justificar este hecho de diversas maneras. Por ejemplo puede verse directamente y de manera muy sencilla que los tres ángulos concurrentes en cada uno de los vértices suman 360º. Otro modo de razonar podría ser ver esta teselación como una deformación del recubrimiento del plano por hexágonos regulares.

Referencias bibliográficas

BAENA RUÍZ, J. (1991): "Papiroflexia: actividades para investigar en clase de matemáticas", *Suma*, nº 9. Pp. 64-66.

HULL, T. (2006): *Project Origami. Activities for exploring mathematics*, A K Peters Ltd.

ROYO PRIETO, J.I. (2002): "Matemáticas y papiroflexia", *Sigma: revista de matemáticas*, nº 21. Pp. 175-192.

[1] www.divulgamat.net. Entre los muy variados y recomendables materiales hay una interesante sección dedicada a aspectos matemáticos de la papiroflexia.

[2] Pero también al álgebra geométrica (demostración de identidades notables, etc.) e incluso al álgebra abstracta, donde se puede demostrar, por ejemplo, la trisección del ángulo o la duplicación del cubo (problemas irresolubles con regla y compás) doblando papel.

[3] A la hora de implementar la actividad puede ser interesante abrir una discusión sobre la unicidad o no de este pliegue. En este caso sólo existe una doblez que haga lo que nosotros deseamos, pero no siempre ocurre esto al trabajar doblando papel.

[4] El área de este cuadrado es la mitad de la del cuadrado original. Este hecho se discute más extensamente en una sección posterior, no obstante puede ser interesante en algunos niveles tratar de justificar (o demostrar) esta afirmación en este caso particular.