NÚMEROS CONGRUENTES

Definición Dos números a y b son congruentes respecto a un número, ó módulo, m si al dividirlos por éste dan el mismo resto.

Se escribe $a \equiv b \pmod{m}$ Ejemplo: $43 \equiv 58 \pmod{5}$

Propiedades

Reflexiva: $a \equiv a \pmod{m}$
Simétrica: si $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
Transitiva: si $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

Consecuencias de la definición

1.- El dividendo y el resto de una división entera son congruentes respecto del divisor.

D: dividendo
d: divisor
c: cociente
r: resto

$D \equiv r \pmod{m}$

2.- Todo múltiplo de un número m es congruente con 0 (cero), respecto de m.

$\dot{m} \equiv 0 \pmod{m}$

Teorema fundamental La condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto a un módulo, es que su diferencia sea múltiplo del módulo. Es decir:

$a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow a-b=\dot{m}$

Corolarios

C1.- Si $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a \equiv b \pmod{p}\ \forall p/m$

C2.- Si $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow ak \equiv bk \pmod{mk}$

C3.- Si $a \equiv b \pmod{m'}$
$a \equiv b \pmod{m''}$ $\rightarrow$ $a \equiv b \pmod{m}$ siendo $m=$ m.c.m (m', m'', m''')
$a \equiv b \pmod{m'''}$

Operaciones con congruencias

Suma y resta (suma algebraica):

Si $a_i \equiv b_i \pmod{m}\ \forall i=1,2,\ldots n \rightarrow \sum_{1}^{n} a_i \equiv \sum_{1}^{n} b_i \pmod{m}$

C1: Se puede sumar o restar un mismo número a los dos miembros de una congruencia. Se pueden transponer términos.

Producto

Si $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ $\forall$ $i=1,2,\ldots n \rightarrow \prod_{1}^{n} a_i \equiv \prod_{1}^{n} b_i \pmod{m}$

C2: Se puede multiplicar por un mismo número los dos miembros de una congruencia sin alterar el módulo.

División

Si $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a/p \equiv b/p \pmod{m} \wedge$ m.c.m $(p,m)=1$

C3: Se puede dividir miembro a miembro dos congruencias siempre que los miembros de la que sirve como divisor sean primos con el módulo.

Ejercicios

Ejercicio 1.- Demostrar que $\forall$ $n \in N \rightarrow 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = \dot{\overline{17}}$

Ejercicio 2.- Demostrar que $\forall$ $n \in N \wedge n \neq \dot{3} \rightarrow 2^{2n} + 2^{n} + 1 = \dot{7}$

Demostrar que $\forall$ $n \in N$ $7^{2n+1} - 48^{n} - 7 = \dot{\overline{48}}$

Ejercicio 3.- Demostrar que cualquier año tiene como mínimo un martes y 13, y como máximo tres.

Ejercicio 4.- Hallar los valores de a, b, c para que el número $\underline{2a}\ \underline{2b}\ \underline{2c}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}$ sea divisible por 23 y por 29.

Problemas

Problema 1.- ¿Se puede expresar el área de un triángulo ABC mediante la fórmula $S = Rr(\mathrm{sen}A + \mathrm{sen}B + \mathrm{sen}C)$?

R:radio del círculo circunscrito

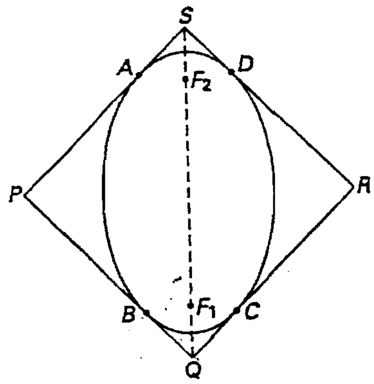
r: radio del círculo inscrito

Problema 2.- El número A3640548981270644B ¿es divisible por 99?. Calcular el par ordenado de dígitos (A,B).

Problema 3.- Dada la elipse de la figura, inscrita en un cuadrado PQRS, siendo F_1 y F_2 los focos, justificar:

1.- $\widehat{PAF1} = \widehat{QBF1}$

2.- PAF1B es un cuadrilátero inscriptible en un círculo.



Problema 4.- Resolver la ecuación: $f(X) = X^{(8)} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} X^{(7)} \cdot X^{(1)} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} X^{(6)} \cdot X^{(2)} + \ldots + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} X^{(8)} = 0,$

Siendo $X^{(h)} = X(X-1)(X-2)\ldots.(X-h+1)$

Problema 5.- Demostrar que los números de la sucesión 16, 1156, 111556, 11115556, ... que se obtiene intercalando 15 entre las cifras centrales de cada uno, para obtener el siguiente, son siempre cuadrados perfectos.

Problema 6.- Demostrar que las alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son los pies de estas alturas.