Problemas Geométricos Olimpiada Matemática Española
Fase Local. (Distrito: Universidad de Zaragoza)

http://www.terra.es/personal/iesblecu/

81-82/1. Dada la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, determinar la tangente a la misma que pasa:
a) por el punto (1 , 1)
b) por el punto (1 , 0)
c) por el punto (0 , 5)
¿Cuántas soluciones hay en cada caso?

81-82/6. Dado un triángulo equilátero, demostrar que la suma de las distancias a los tres lados, desde un punto interior del triángulo, es constante.

82–83/1. Sea AC la diagonal más grande de un paralelogramo ABCD. Desde C se trazan las perpendiculares a AB y AD. Sean E y F los pies de estas perpendiculares. Demostrar que:

$$AB \bullet AE + AD \bullet AF = (AC)^2$$

82–83/5. Dado un ángulo agudo $\angle$ XOY, y dado un punto A sobre OY. Indicar como se puede determinar con regla y compás un punto M sobre OY que equidiste de AY y del otro lado OX del ángulo.

83–84/2. Un poste vertical de altura a, iluminado por los rayos del sol, arroja una sombra sobre un plano horizontal. La longitud de la sombra era a en un momento, 2a en otro momento y 3a en un tercero. Probar que la suma de los ángulos de incidencia de los rayos con el plano en esos tres instantes es igual a un ángulo recto.

83–84/7. Dado un triángulo equilátero ABC de lado a , se trazan por un punto D del lado AB las rectas DE paralela a AC y DF paralela a BC. Hallar d = AD para que el volumen engendrado por el paralelogramo DECF al girar alrededor de AC sea dos tercios del volumen engendrado por ABC al girar alrededor de AC.

84–85/7. Sobre un segmento AB = 2 a tomado como base se construyen tres triángulos isósceles ACB, AC'B, AC''B de alturas respectivas a, 2a, 3a.
Demostrar que la suma de los ángulos en los vértices C, C', C'' de estos tres triángulos es igual a dos rectos.

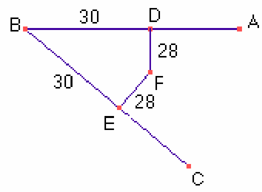
85–86/2. En una circunferencia de radio r y centro O inscribimos un triángulo ABC de tal forma que el lado BC tiene una longitud igual a 2r. Con diámetros AB y AC trazamos dos semicircunferencias cuyos puntos verifican que la distancia de cualquiera de ellos al punto es mayor o igual a r; estas semicircunferencias forman con los arcos menores subtendidos por los lados AB y AC dos recintos de forma de lúnula.
Determinar la razón existente entre la suma de las áreas de las dos lúnulas y el área del triángulo ABC.

86–87/3. En la pared interna de un tarro cilíndrico de vidrio se ve una gota de miel a 3 cm. del borde superior del recipiente. En la pared externa a 2 cm. del borde superior y en la generatriz simétrica, respecto del eje del cilindro, de la generatriz en la que estaba la gota de miel, se ha posado una mosca. Hallar la distancia, por el camino más corto, que tiene que recorrer la mosca para llegar a la gota de miel.
La altura del tarro es de 20 cm. y su diámetro de 10 cm.
(Expresar el resultado en función de π)

86–87/5. En el punto A, que se encuentra a la distancia a del centro de una mesa de billar redonda de radio R , hay una bola, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas. ¿ A qué punto B de la banda de billar hay que dirigir la bola para que, después de rebotar dos veces en la banda, vuelva al punto A?

87–88/1. Un triángulo equilátero y un exágono regular son isoperímetros. Si el área del triángulo es de 2 cm^2 , ¿cuál es el área del exágono?

87–88/6. La figura es tal que AB representa el dintel del marco de una puerta mientras que CB representa la parte superior de una puerta que se muestra parcialmente abierta. DE y EF son dos varillas que se mantienen ligadas en F. La varilla DF está ligada al marco en D y la varilla EF está ligada a la puerta en E. Las longitudes BD =BE =30cms. Mientras que FE = FD = 28 cms.



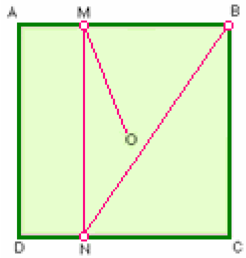
a) Calcular el ángulo $\angle$DBE cuando la puerta está abierta en su posición extrema.
b) Calcular el ángulo $\angle$DFE cuando el ángulo $\angle$DBE es recto.
c) Calcular el ángulo en B cuando la posición de F está lo más alejada posible del marco de la puerta.

Describe tan completamente como puedas el lugar geométrico de F cuando la puerta se mueve desde su posición de cerrada a su posición de máxima apertura posible.

88–89/4. Construir un triángulo cualquiera conocidas las tres medianas.

89–90/1. Demostrar que la suma de las distancias de los tres vértices de un triángulo a una recta cualquiera es igual al triplo de la distancia de su baricentro (intersección de medianas) a la recta.

89–90/2. El arrastre de piedra es un deporte popular del País Vasco que consiste en desplazar una piedra, especialmente tallada, de unas tres toneladas de peso que está enganchada a una pareja de bueyes; estos bueyes son dirigidos y azuzados por un par de boyeros que, en ocasiones colaboran en avivar el desplazamiento de la piedra.
Con motivo de las fiestas grandes de Bilbao se realiza una de estas competiciones en la Plaza Nueva de la Villa; esta Plaza es un cuadrado y la figura adjunta es un croquis de la plaza. La competición consiste en partir del Centro de la Plaza y trasladar la piedra hasta un punto M del lado AB, luego se realiza el recorrido MN paralelamente al lado AD y desde el punto N se deben dirigir hasta el vértice B, donde termina la prueba.



1) Hallar el punto M que proporciona el menor recorrido.
2) Hallar el punto M' que ocasiona el recorrido máximo.
3) Si en el arrastre consiguen avanzar unos 10 m. cada minuto y medio, se desea saber el tiempo que tardarían en realizar el recorrido mínimo y el recorrido máximo. El control del tiempo se realiza con un cronómetro que tiene una precisión de una décima de segundo.

90–91/2. Una sala de espectáculos tiene una pantalla de 5 m. de ancho.
a) Dibujar una zona en la que los espectadores vean la pantalla bajo un ángulo comprendido entre 45º y 90º; después otra zona desde la que se vea la pantalla bajo un ángulo comprendido entre 30º y 45º.
b) ¿Cuáles son las dimensiones mínimas de la sala para que contenga las dos zonas anteriores?

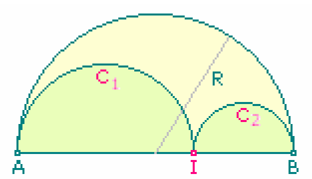
90–91/5. LA HERENCIA ESTÁ EN EL LAGO. Dos hermanos, Abel y Hernando, han heredado dos campos cuadrados, un lado de cada uno de los cuatro campos forma una de las orillas del lago SISTE, lago con forma de cuadrilátero. Las superficies heredadas por los dos hermanos son, naturalmente, rigurosamente idénticas. Durante su jogging alrededor del lago (que realiza a velocidad constante), Abel sale de casa, llega al embarcadero en 30 sg., pasa por delante de la casa de Hernando 1min 30 sg. después de su partida y termina el recorrido del lago en 4 min. ¿Cuál es la superficie del lago?
Hay que saber que las dimensiones de los campos son números enteros de decámetros, y que Abel corre a una velocidad comprendida entre los 15 y 20 km./hora.

91–92/1. Se corta un alambre de un metro de longitud en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcular por donde hay que realizar el corte para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea:
a) Mínima.
b) máxima.

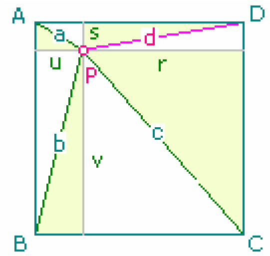
91–92/3. Se da la recta de ecuación $x = 2$. Dado un punto cualquiera M del plano, se traza la recta OM, que corta a r en el punto A, la recta MB, perpendicular a r , a la que corta en el punto B, y la recta AC , paralela a MB, siendo C el punto en que corta a OB . Se pide:
a) Coordenadas del punto C en función de las coordenadas de M.
b) Comprobar que la recta MC pasa por un punto fijo independiente de la posición de M, y hallar ese punto fijo.

91–92 / 6.- Un vaso tiene forma cilíndrica de 18 cm de radio y 37 cm de altura. Está lleno de agua hasta 10 cm de su borde.
¿Cuánta agua se derramará si en su interior se introducen dos esferas de 13 cm. de radio?

92–93 / 1. En la figura se conoce el radio R del semicírculo mayor (R=10 cm). El punto I es variable sobre el diámetro.
¿Puede Vd. Hallar la suma de las longitudes de las semicircunferencias C_1 y C_2? ¿ Cuál será la situación del punto I para que sea máxima el área del semicírculo mayor que es exterior a los semicírculos pequeños?



92–93 / 4. Pedro está sentado en un patio rectangular. Andrés que viene del A da 6 pasos para reunirse con Pedro. Bernardo desde el rincón B, 21 pasos y Carlos que viene de C, 27 pasos.
Pedro quisiera salir por D y le gustaría saber cuántos pasos debe dar. (Todos los pasos tienen la misma longitud).
Para responder a esta cuestión:



a) Llame u, v, r y s las distancias, en pasos, de Pedro a los lados del patio. Busque en su dibujo cuatro triángulos rectángulos diferentes. El Teorema de Pitágoras nos proporciona cuatro ecuaciones entre los cuadrados de a, b, c, d, u, v, r y s.
b) Sume estas cuatro igualdades; deduzca una relación entre a, b, c y d. Calcule de allí d.

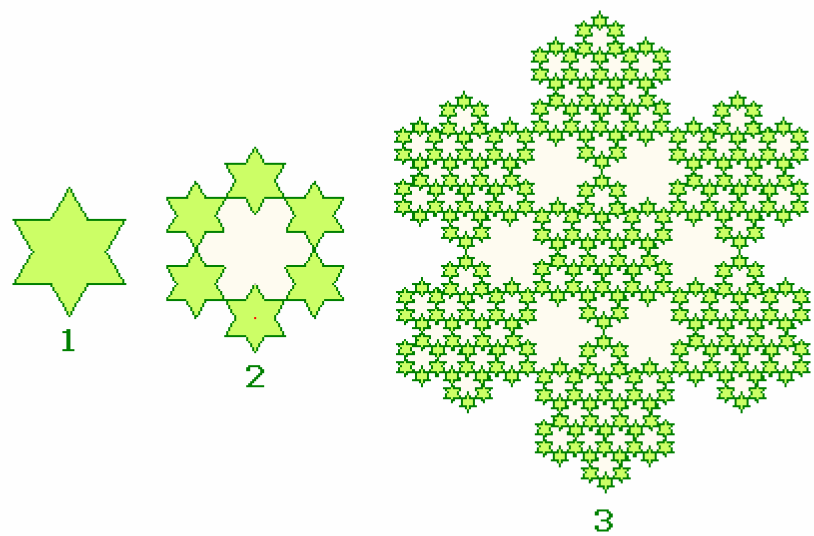
92–93 / 5. En un cubo de arista a se considera una diagonal D del mismo y una diagonal d de una de sus caras, de tal forma que las rectas d y D se crucen. Hallar la distancia de D a d.

93–94 / 1. Dadas tres rectas paralelas, construir un triángulo equilátero que tenga un vértice sobre cada una de las rectas.

93–94 / 3. En un cono de revolución recto se han colocado cuatro esferas iguales, de radio R. Tres de ellas son tangentes al círculo de la base, a la superficie lateral y entre ellas dos a dos. La cuarta es tangente a la superficie lateral del cono y a las tres esferas anteriores. Hallar el volumen del cono y el espacio hueco del conjunto.

93–94 / 7. Un triángulo equilátero es isoperímetro de un hexágono regular. La superficie del triángulo es 1994 cm^2.
¿Cuál es la superficie del hexágono?

94–95 / 1. El tapete (3) dibujado en la parte inferior lleva un cierto número de estrellas (1) y un cierto número de agujeros (2). (Se llama agujero toda región cerrada totalmente rodeada de estrellas).
¿Cuál es el área total de los agujeros sabiendo que el área de una estrella es igual a 1 cm^2?.



94–95 / 2. Dadas dos circunferencias secantes, C y C’, trazar por uno de sus puntos de intersección E una secante que sea bisecada por dicho punto E.

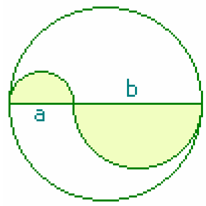
94–95 / 5. Una bicicleta está cuidadosamente colocada delante de un muro. Ante este muro, en el nivel del suelo, se encuentra un soporte cuadrado. Curiosamente, las dos esquinas superiores del soporte coinciden con dos puntos de la rueda.
Sabiendo que el lado del soporte mide 56 cm., ¿cuál es el diámetro de la rueda de la bicicleta?. Se dará la respuesta en cm. redondeada eventualmente al cm. más próximo?

95–96 / 2. La Alcaldesa de una ciudad nueva hace arreglar ante el Ayuntamiento la magnífica plaza en forma de hexágono regular, con un pavimento de losas triangulares equiláteras.
Para construir esto se han utilizado en total entre 1900 y 1998 losas triangulares.
Sabiendo que el lado de cada triángulo equilátero mide medio metro, se pide determinar el perímetro de la plaza del Ayuntamiento de esta nueva ciudad.

95-96 / 5. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. La bisectriz del ángulo A corta al segmento BC en el punto E y a la circunferencia circunscrita al triángulo en el punto M distinto del A. Sean K y L los pies de las perpendiculares trazadas desde E a los lados AB y AC, respectivamente. Se pide demostrar que el área del triángulo ABC es igual a la del cuadrilátero AKLM.

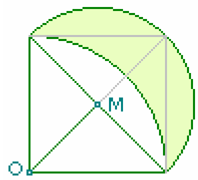
96–97 / 3. Sea MNPQ un trapecio y O el punto de intersección de sus diagonales. Sea A el área del triángulo MOQ y B la del triángulo NOP. Supuestas conocidas A y B , determinar, en función de ellas, el área del trapecio.

96–97 / 4. ¿Qué relación guardan las partes blanca y rayada del círculo en la figura si b = 2a.



96–97 / 6. Casi siempre, las expresiones en las que interviene el número π no se pueden resolver en dibujo usando solamente la regla y el compás.
Hay excepciones como la lúnula de la figura adjunta. Los centros de los círculos son O y M.
Se pide obtener:

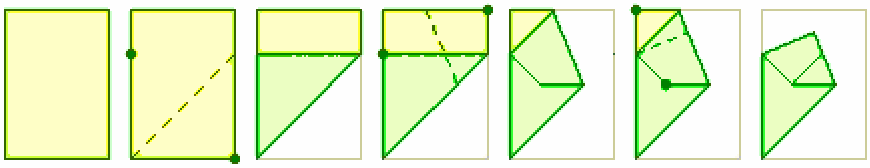
1) Área de la lúnula.
2) Compararla con la del cuadrado de lado OM.
3) ¿Cuál de las dos figuras anteriores tiene perímetro mayor?



97-98 / 3. Demostrar que el circuncentro de un triángulo ABC es el punto medio del segmento determinado por el simétrico del ortocentro respecto de un vértice cualquiera C y por el vértice C' del paralelogramo construido sobre los dos lados CA y CB.

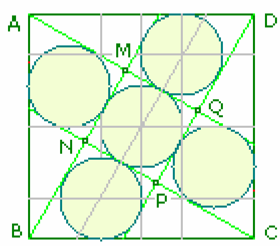
97-98 / 4. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los lados de los distintos triángulos que se pueden inscribir en un círculo dado, teniendo todos ello por base una cuerda fija AB de longitud m.

97-98 / 7. En una hoja DIN A 4 la dimensión de los dos márgenes es de *uno* el lado menor y de *raíz de dos* el lado mayor.



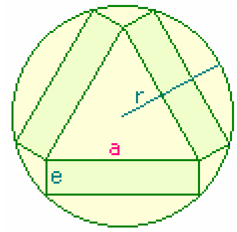
Realizamos los plegamientos que vienen expresados en el dibujo y obtenemos un *ROMBOIDE* (cometa). Se pide calcular el área de esta figura.

98-99 / 1. En la figura adjunta, los cuadriláteros ABCD y MNPQ son cuadrados y las cinco circunferencia son iguales entre sí.
Sabiendo que el lado de ABCD es igual a <u>*un metro*</u> calcular el radio de las circunferencias.



98-99 / 4.- Construir un cuadrilátero, dadas las dos diagonales, el ángulo que forman y dos de sus lados opuestos.

99-00/3. Para fabricar un caleidoscopio cortamos tres piezas de espejo rectangulares que colocamos dentro de un tubo cilíndrico de radio interior r de modo que formen un prisma recto triangular (equilátero). La pieza de espejo tiene un espesor e . La sección es ésta:
Siendo a la anchura de los espejos ¿cuánto vale a?



99-00/4. El Señor Botella acaba de recibir un contenedor de vino con forma de cubo lleno con 27 litros. Al recibirlo ha hecho tres pequeños agujeros en el centro de tres caras que tienen un vértice común. No teniendo nada a mano para taponarlos, ¿ cuál es el volumen máximo que puede esperar salvar?. (los tres agujeros son de diámetro despreciable, pero dejan escapar, de todos modos, la bebida).

00-01/2. Inscribir en una semicircunferencia de diámetro AD un cuadrilátero ABCD tal que el punto O de intersección de las diagonales esté a una distancia dada h de AD y que se verifique

$$\frac{OA \times OD}{AB \times DC} = 2 \, .$$

00-01/4. Disponemos de dos cubos C_1 y C_2 y sabemos que:
a) La suma de todas sus aristas (las de los dos cubos) es igual a 24 dm.
b) La suma de sus volúmenes es 6 dm^3
¿Cuánto vale la suma de las áreas de todas sus caras?

01-02/2. En una circunferencia de radio igual a 4 cm. se inscribe un triángulo equilátero. Desde el centro O se gira el triángulo un ángulo de 90º. Ambos triángulos determinan una zona común; determinar el área de ese recinto.

01-02/6. El Profesor Odnanref es un entusiasta de la Geometría. Para él cosas tan bellas como la *Sección Aúrea* son su alegría.
Un día cae en sus manos un bizcocho de forma rectangular (de vértices consecutivos A, B, C, D) que se dispone a compartir con sus trillizos. Cuchillo en mano, parte del vértice A y dando tres cortes AP, PQ y QA se prepara para él un hermoso triángulo APQ. P es un punto situado en algún lugar del lado CD, mientras que Q se encuentra en el lado BC. Los trillizos reclaman su trozo del bizcocho. Odnanref ha sido capaz de dejarles ¡TRES TRIÁNGULOS EQUIVALENTES! (de la misma superficie) para que no discutan.
1ª CUESTIÓN: ¿Cómo la ha hecho? ¿Dónde ha situado los puntos P y Q para que esto sea así? .
2ª CUESTIÓN: Parece que el trozo del padre (¡qué cara!) es más grande que el que le ha tocado a cada hijo. ¿Cuántas veces más grande?.

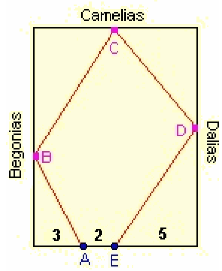
02-03/2. a) En un triángulo cualquiera trazamos las tres bisectrices que se cortan en un punto llamado incentro y que es el centro de la circunferencia inscrita de radio r. Pedimos demostrar que el área del triángulo es el producto del radio r por el semiperímetro del triángulo.
b) Consideramos un triángulo cualquiera ABC cuyas medianas AA′ y BB′ se cortan en G. Probar que si las circunferencias inscritas en los triángulos AGB′ y BGA′ tienen igual radio, el triángulo ABC es isósceles.

02-03/6. Tenemos un triángulo rectángulo ABC y sobre su hipotenusa BC construimos un cuadrado BCDE. Demostrar que el punto M (centro del cuadrado) está en la bisectriz del ángulo recto A del triángulo ABC.

03-04/2. En un patio cuadrado ABCD situamos un punto O que diste 3 m. , 4 m. y 5 m. respectivamente de A, B y C . Calcular la longitud **l** del lado del cuadrado.

03-04/5. En el lado AB de un triángulo ABC se toma un punto K de tal forma que AK : KB = 3 . ¿Dónde habrá que tomar un punto D, situado en uno de los lados del triángulo, para que la recta KD divida su área por la mitad?.

04-05/2. Un patio rectángular de 10 por 12 metros está flanqueado en tres de sus lados por begonias, camelias y dalias. En el lado sin flores están Ana y Emilio, tal y como se ve en el croquis.
Ana quiere llevarle a Emilio un ramo que tenga begonias, camelias y dalias, pero además quiere llegar lo antes posible. ¿Cuánto mide el camino más corto?.
Razona y justifica tu respuesta.



04-05/4. Sea un triángulo equilátero. Sean A', B' y C' puntos sobre los tres lados BC, CA y AB, respectivamente, tales que $\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = 2$.
Los tres segmentos AA', BB' y CC' determinan el triángulo DEF. Demuestra que el área de este triángulo es un séptimo del área del triángulo ABC.

05-06/1. Se da un triángulo rectángulo isósceles ABC, con el ángulo recto en C, y los catetos de longitud 2. Un arco de circulo *l* con centro A divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo *m* con centro en B es tangente al arco *l* en un punto de la hipotenusa AB. Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

05-06/3. En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del circulo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.

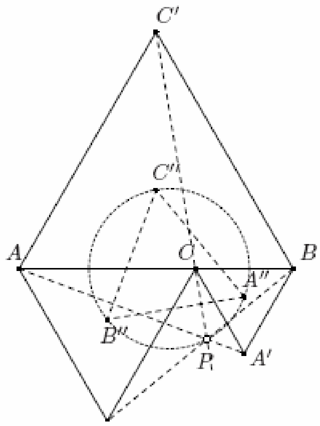
Problemas Geométricos Olimpiada Matemática Española
Fase Nacional

http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimmain.htm

1993/3. Justificar razonadamente que, en cualquier triángulo, el diámetro de la circunferencia inscrita no es mayor que el radio de la circunferencia circunscrita.

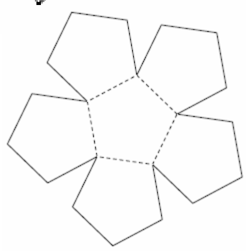
1994/4. El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

1995/3. Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que: $\frac{PB}{PA} \bullet \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$



1995/6. En la figura, AB es un segmento fijo y C un punto variable dentro de él. Se construyen triángulos equiláteros de lados AC y CB, ACB′ y CBA′ en el mismo semiplano definido por AB, y otro de lado AB, ABC′ en el semiplano opuesto. Demuestra:
a) Las rectas AA′, BB′ y CC′ son concurrentes.
b) Si llamamos P al punto común a las tres rectas del apartado a), hallar el lugar geométrico de P cuando C varía en el segmento AB.
c) Los centros A′′, B′′ y C′′ de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.
d) Los puntos A′′, B′′, C′′ y P están sobre una circunferencia.

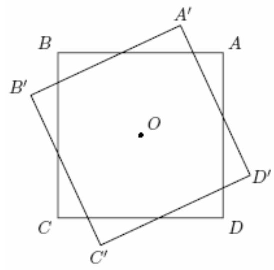
1996/2. Sea G el baricentro de un triángulo ABC. Demostrar que si AB+GC=AC+GB, el triángulo es isósceles.



1996/6. La figura de la izquierda se compone de seis pentágonos regulares de lado 1m. Se dobla por las líneas de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice.
¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente formado?.

1997/5. Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

1998/1. Un cuadrado ABCD de centro O y lado l, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.



1998/3. Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que: $\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$

1998/4. Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

1999/1. Las rectas t y t', tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2$ en los puntos A y B, se cortan en el punto C.
La mediana del triángulo Δ ABC correspondiente al vértice C tiene longitud m.
Determinar el área del triángulo Δ ABC en función de m.
1999/5. El baricentro del triángulo Δ ABC es G. Denotamos por g_a, g_b, g_c las distancias desde G a los lados a, b y c respectivamente. Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que:
i) $g_a \geq \frac{2r}{3}$, $g_b \geq \frac{2r}{3}$, $g_c \geq \frac{2r}{3}$
ii) $\frac{g_a+g_b+g_c}{r} \geq 3$

2000/3. Dos circunferencias secantes C_1 y C_2 de radios r_1 y r_2 se cortan en los puntos A y B.
Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a C_1 y C_2 en dos puntos que llamaremos P_r y Q_r respectivamente.
Demuestra la siguiente propiedad: Existe un punto M, que depende sólo de C_1 y C_2, tal que la mediatriz del segmento P_rQ_r pasa por M.

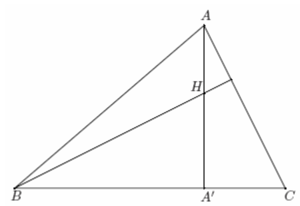
2000/5. Tomemos cuatro puntos situados en el interior o el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que 1.

2001/2. Sea *P* un punto, en el interior del triángulo *ABC*, de modo que el triángulo *ABP* es isósceles. Sobre cada uno de ln pos otros dos lados de *ABC* se construyen exteriormente triángulos *BCQ* y *CAR*, ambos semejantes al triángulo *ABP*.
Probar que los puntos *P*, *Q*, *C* y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

2001/3. Están dados 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.
Demuestra que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

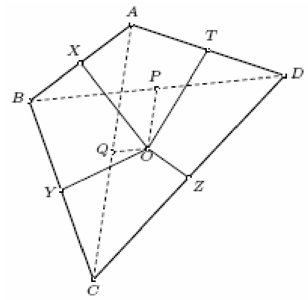
2001/5.- *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que *AB* es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita. Probar que: $CD \leq 2\sqrt{5}-4$

2002/2. En un triángulo *ABC*, *A'* es el pie de la altura relativa al vértice *A* y *H* el ortocentro.
a) Dado un número real positivo k tal que $\frac{AA'}{HA'}=k$, encontrar la relación entre los ángulos *B* y *C* en función de k.
b) Si *B* y *C* son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice *A* para cada valor de *k*.



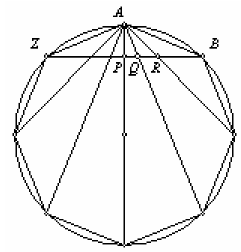
2003 / 3. Las alturas del triángulo *ABC* se cortan en el punto *H*. Se sabe que *AB* = *CH*. Determinar el valor del ángulo $\angle BCA$.

2003 / 5. ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?



2004 / 2. *ABCD* es un cuadrilátero cualquiera, *P* y *Q* los puntos medios de las diagonales *BD* y *AC* respectivamente. Las paralelas por *P* y *Q* a la otro diagonal se cortan en *O*.
Si unimos *O* con las cuatro puntos medios de los lados *X*, *Y*, *Z* y *T* se forman cuatro cuadriláteros, *OXBY*, *OYCZ*, *OZDT* y *OTAX*.
Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

2004 / 5. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo *ABC*, la mediana desde *B* sea dividida en tras partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es $\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}$.



2005 / 3. Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado.
Sea *ABC...XYZ* un polígono regular de *n* lados con todos sus lados de longitud 1. Las $n - 3$ diagonales que salen del vértice *A* dividen al triángulo *ZAB* en $n - 2$ triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.

2005 / 6. En un triángulo de lados *a*, *b*, *c* el lado *a* es la media aritmética de *b* y *c*. Probar:
a) $0º \le A \le 60º$.
b) La altura relativa al lado *a* es tres veces el inradio *r*.
c) La distancia del circuncentro al lado *a* es $R - r$.

2006 / 2. Las dimensiones de un paralelepípedo de madera son enteras. Pintamos toda su superficie (las seis caras) y lo cortamos en cubos de una unidad de arista y observamos que exactamente la mitad de los pequeños cubos no tienen ninguna cara pintada. Probar que el número de paralelepípedos con tal propiedad es finito.

2006 / 3. *ABC* es un triángulo isósceles con *AB* = *AC*. Sea *P* un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados *AB* en *B* y a *AC* en *C*.
Pongamos *a*, *b* y *c* a las distancias desde *P* a los lados *BC*, *AC* y *AB* respectivamente. Probar que: $a^2 = bc$

2006 / 6. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo ABCD se cortan en E. Denotamos por S_1, S_2 y S a las áreas de los triángulos ABE, CDE y del cuadrilátero ABCD respectivamente. Prueba que $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \le \sqrt{S}$ ¿Cuándo se alcanza la igualdad?