Jugando con el Dominó

Antonio M. Oller Marcén

1. Introducción

Todos conocéis el juego del dominó. Es más que probable que hayáis jugado más de una vez e incluso que alguno sea un experto. Ahora bien, si se os preguntase si hay relación entre el dominó y las matemáticas ¿sabríais responder? Una relación evidente y algo tonta es que aparecen números. Pero las matemáticas son mucho más que trabajar con números y hacer cuentas. En las actividades que vamos a realizar a continuación vamos a jugar con (y no al) dominó. La idea es que penséis, que busquéis un motivo a las cosas que suceden, pues esto sí tiene mucho más que ver con las matemáticas (todo en realidad) que los números y las cuentas.

Nunca está de más saber un poco de la historia de aquello con lo que uno va a trabajar. Sólo vamos a dar unas pequeñísimas pinceladas. Se cree que el dominó, como tantos otros juegos del mismo tipo, nació en China hace unos 3000 años. De allí pasó a Egipto y cuando lo descubrieron los árabes le añadieron las fichas blancas[1]. En Europa, dónde somos tan listos y creemos haberlo inventado todo, no consta que se jugará hasta el siglo XVIII en Italia. Actualmente existen incluso campeonatos nacionales, européos y mundiales[2]. Por último indicar que el dominó tiene una relación muy muy estrecha con los dados ¿Se te ocurre cuál pueda ser?

2. Contando Fichas

En un juego de dominó usual aparecen las cifras entre 0 y 6. Como dibujar aquí las fichas de dominó es muy complicado las representaremos con los números entre paréntesis; por ejemplo (1,4).

Vamos a contar cuántas fichas hay en un juego de dominó. En realidad esto es muy sencillo, sólo hay que contar a mano, después de un breve tiempo se llegará a la repuesta que es 28. Pero, si quisiéramos fabricar un macro-juego de dominó en el que aparecieran las cifras desde 0 hasta 25 está claro que harían falta muchas más piezas ¿cuántas?[3] Si quisiéramos llegar hasta el 50 empieza a ser incómodo tener que contar[4]. Parece entonces que nos puede interesar buscar una fórmula para contar el número de piezas que forma un juego de dominó en función de las cifras que aparezcan en él. Para ello vamos a revisar el modo en el que hemos contado las 28 piezas del juego original.

Vamos a fijarnos primero en cuántas veces aparece el 0. Lo hace en el (0,0); en el (0,1) y así hasta el (0,6); es decir, 7 veces. A continuación nos fijamos en el 1. Aparece en el (1,0)

[1] Recuerda que los árabes son los que introdujeron la cifra '0' en Europa

[2] Puedes buscar información en internet sobre la FIDO

[3] Veremos que son 351

[4] Salvo que te guste mucho contar hasta 1326

[pero ¡ojo! este ya lo hemos contado], en el (1,1) y así hasta el (1,6) lo que nos da un total de 6 apariciones. Si seguimos mirando veremos que el 2 aparece 5 veces, el 3 lo hace 4, el 4 en 3 ocasiones, el 5 en 2 y el 6 en 1. Sólo nos queda sumar y tenemos:

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

Lo importante de la forma en la que hemos contado las fichas reside en que lo hemos hecho ordenadamente, siguiendo un método. Esto nos va a permitir *exportar* esta manera de contar a otros casos mayores. Por ejemplo supongamos que tenemos un dominó que llega hasta el número 25 y vamos a contar del mismo modo que antes. En este caso el 0 aparece en 26 ocasiones, el 1 lo hace en 25 y así sucesivamente. Así el número de fichas que aparece es:

$$26 + 25 + 24 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1 = 351$$

Es más, si en nuestro juego queremos que aparezcan las cifras 0, 1,. . . , n y contamos de la misma manera veremos que el número de fichas total (que llamaremos $F(n)$) es:

$$F(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n + 1)$$

Tenemos ahora otro problema: calcular el valor de la suma $1 + 2 + \ldots + (n + 1)$. Veamos cómo lo podemos resolver. Vamos a llamar S a la suma que estamos buscando y nos damos cuenta de lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n+1 \\ S & = & n+1 & + & n & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 2S & = & n+2 & + & n+2 & + & \ldots & + & n+2 \end{array}$$

Como aparecen n sumandos tenemos que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = S = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Y así, tenemos también la fórmula que buscábamos:

$$F(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Después de todo este trabajo, un par de preguntas (una más incómoda que la otra):

- ¿De cuántas fichas estaría formado un dominó si no hubiera fichas dobles?
- Si las fichas son triples, ¿cuántas fichas distintas aparecen en un "triminó" con las cifras de 0 a 6?[5]
- Puedes tratar de pensar lo mismo que en la pregunta anterior pero para fichas cuádruples, quíntuples o más.[6]

[5] Son 196. Se pueden contar más o menos fácilmente.

[6] Quizás quieras probar con n=3. ¡Ojo con las fichas iguales! Ver Apéndice.

3. La Partida Perfecta

La mecánica del juego del dominó es bien sencilla: colocar unas piezas a continuación de las otras con la única regla de que sólo pueden tocarse por el lado en el que comparten número (si lo hacen). Las fichas dobles juegan un papel especial que aquí no vamos a tener en cuenta, es decir, nuestras partidas van a ser “lineales”. De hecho, vamos a jugar sin fichas dobles.

Diremos que hemos hecho una partida perfecta si logramos emplear todas las fichas empezando y terminando por el mismo número. Llamaremos a una partida semiperfecta si logramos utilizar todas las fichas pero empezamos y terminamos por números distintos.

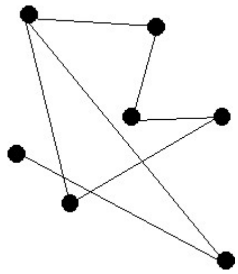
- Haz una partida perfecta (si puedes). ¿Con qué número has empezado y terminado? ¿Crees que podrás hacerlo con otro?
- ¿Puedes hacer una partida semiperfecta? Quita una ficha cualquiera, ¿puedes ahora? ¿con qué cifras has empezado y terminado? Quita otra más, ¿puedes hacer ahora una partida semiperfecta? ¿Crees que es importante la segunda ficha que has quitado?
- Nos olvidamos ahora de las fichas blancas. ¿Puedes hacer alguna partida perfecta? ¿Y semiperfecta?
- Elige dos o tres conjuntos de al menos 6 piezas que te permitan hacer partidas perfectas. ¿Tienen algo en común?
- Elige dos o tres conjuntos de al menos 6 piezas que te permitan hacer partidas semiperfectas. ¿Tienen algo en común?
- ¿Te atreves a hacer alguna conjetura sobre qué tiene que cumplir un conjunto de fichas de dominó para que puedas jugar una partida perfecta? ¿Y para que puedas hacer una partida semiperfecta?

Hasta ahora hemos estado jugando con el dominó habitual, es decir, con el que emplea las cifras de 0 a 6 (aunque es verdad que nos hemos olvidado de las fichas dobles). Nos planteamos jugar con un dominó que emplee las cifras de 0 hasta n (olvidándonos también de las dobles). ¿Qué tiene que cumplir n para que podamos hacer partidas perfectas?

Seguro que se te ha ocurrido fijarte en que empezando con una cifra cualquiera hay muchas formas de hacer partidas perfectas, ¿habrá alguna manera “mecánica” de obtenerlas todas a partir de una concreta?

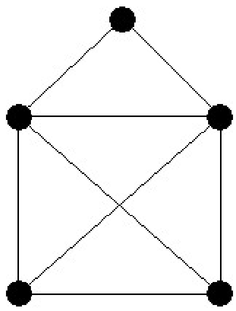
4. Grafos y Dominó

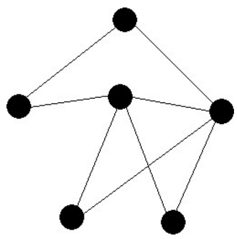
Hay diversas maneras de definir lo que es un grafo, pero como una imagen vale más que mil palabras, nos vamos a conformar con dar un ejemplo:



Un grafo se dice conexo si siempre tienes algún camino que une dos vértices cualesquiera. Dibuja un grafo conexo cualquiera y numera los vértices. Para cada arista que una dos vértices puede tomar una ficha de dominó formada por los números de esos vértices. Si haces esto con todas las aristas de tu grafo tendrás un conjunto de fichas de dominó (fíjate en que algunas pueden estar repetidas). Al revés, si tienes unas cuantas fichas de dominó puedes fabricar un grafo poniendo tantos vértices como cifras distintas aparezcan en las fichas y uniendo esos vértices según las piezas que tengas. Es decir, hemos visto que prácticamente grafos y fichas de dominó son lo mismo.

- ¿Qué dominó te queda a partir de los siguientes grafos?





  ¿Crees que tendrá alguna importancia la manera de numerar los vértices?

- Dibuja el grafo que se corresponde con el dominó habitual.[7]

- ¿Se te ocurre alguna manera de poder tener en cuanta también las fichas dobles?

Imagínate que has dibujado un grafo y que has construido su dominó. Te pones a jugar y consigues una partida perfecta.

- ¿En qué se traduce eso en tu grafo?[8] ¿y una partida semiperfecta?[9]

- Traduce las condiciones que debía cumplir un dominó para tener una partida perfecta a lenguaje de grafos. Haz lo mismo para partidas semiperfectas.

- ¿Cumplen los grafos anteriores alguna de esas propiedades? Dibuja un grafo cuyo dominó permita hacer una partida perfecta y otro que permita una partida semiperfecta.

[7] Este se llama grafo completo de 7 vértices, pero eso no importa.

[8] Un grafo así se dice que posee un ciclo euleriano

[9] Un grafo así se dice que posee un camino euleriano

5. Despedida

Puede haber alguien que piense que el dominó no es un juego lo suficientemente intelectual como para dedicarle atención y prefiera el ajedrez, por ejemplo.

Bueno, vamos a hacer un juego empleando el tablero de ajedrez y las fichas del dominó y así todos contentos. Si se os pide que utilizando piezas de dominó cubráis todo el tablero de ajedrez pensaréis (con razón) que eso es una tontería. Como el tablero tiene 8 casillas por fila será suficiente tapar cada fila con 4 fichas para cubrir todo el tablero.

Pero suponed ahora que quitamos dos esquinas opuestas del tablero y se os vuelve a pedir que lo cubráis con fichas de dominó. Intentadlo.

Si la lectura de estas líneas te ha suscitado cualquier duda, comentario o inquietud; puedes escribirme a:

oller@unizar.es

Apéndice: Contando Fichas de k-minó

El objetivo en este apartado es encontrar una fórmula general que nos permita averiguar el número de fichas que forman un k-minó en el que aparecen las cifras desde 0 hasta n. Un k-minó es la generalización directa de un dominó, es una ficha formada por k cuadrados en cada uno de los cuáles aparece una cifra. Hay que tener cuidado con las fichas que son iguales. Observamos que esencialmente hay dos tipos de fichas: unas son simétricas respecto a su centro y otras no. En el caso del dominó usual esta distinción se corresponde con fichas dobles y normales.

Llamaremos $s_k(n)$ al número de fichas de k-minó que son simétricas, $a_k(n)$ al número de fichas que son asimétricas y $f_k(n)$ al número total de fichas de k-minó. Evidentemente se tiene que $f_k(n) = a_k(n) + s_k(n)$.

Primer método:

Comenzaremos considerando el caso en el que k es par. Primero calculamos todas las maneras en las que es posible rellenar una ficha de longitud k con las cifras de 0 hasta n. Este número es $(n+1)^k$ pues para cada casilla tenemos $n+1$ opciones. De todas estas, como decíamos antes, algunas serán simétricas el resto asimétricas. Además, las asimétricas aparecerán exactamente dos veces. Descubramos cuántas son simétricas: como k es par podemos dividir la ficha en dos mitades, como la ficha debe ser simétrica, basta con rellenar la primera mitad para tener la ficha completa. Esto puede hacerse de $(n+1)^{\frac{k}{2}}$ maneras distintas y por lo tanto

$$s_k(n) = (n+1)^{\frac{k}{2}}$$

El resto de las fichas serán asimétricas, pero como cada una de ellas aparece dos veces resulta que:

$$a_k(n) = \frac{(n+1)^k - (n+1)^{\frac{k}{2}}}{2}$$

y así:

$$f_k(n) = a_k(n) + s_k(n) = \frac{(n+1)^k + (n+1)^{\frac{k}{2}}}{2}$$

Ahora analizamos el caso en el que k es impar. La primera parte del razonamiento discurre por el mismo camino, hay $(n+1)^k$ formas de rellenar una ficha de longitud k. Sin embargo, a la hora de contabilizar las fichas simétricas, tenemos una variación pues no podemos dividir la ficha en dos mitades. Lo que podemos hacer ahora es separar la ficha en dos partes iguales de longitud $\frac{k-1}{2}$ con una casilla de separación entre ambas. Para obtener una ficha simétrica bastará con fijar las $\frac{k-1}{2}$ casillas iniciales y la central. Esto puede hacerse de $(n+1)^{\frac{k+1}{2}}$ formas y de este modo resulta que:

$$s_k(n) = (n+1)^{\frac{k+1}{2}}$$

Un razonamiento similar al caso anterior nos permite concluir que:

$$f_k(n) = \frac{(n+1)^k + (n+1)^{\frac{k+1}{2}}}{2}$$

Segundo método:

El método anterior nos proporcionaba una fórmula general, ahora vamos a buscar una fórmula de recurrencia.

Comenzaremos por un par de casos particulares de k. Si $k = 1$ todo es muy sencillo pues obviamente $a_1(n) = 0$ y $f_1(n) = s_1(n) = n + 1$. Si $k = 2$ podemos remitirnos a la primera parte del texto y recordar que $s_2(n) = n + 1$ y que $a_2(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Vamos a analizar qué sucede en el caso general. Supongamos que conocemos tanto $a_k(n)$ como $s_k(n)$ y veamos cómo construir $a_{k+2}(n)$ y $s_{k+2}(n)$. En primer lugar observamos que a partir de una ficha de longitud k podemos construir otra de longitud $k + 2$ sin más que añadir dos casillas una por cada lado de la ficha original. Actuando de esta manera es fácil observar que sólo pueden obtenerse fichas simétricas a partir de fichas que ya lo eran, mientras que pueden obtenerse fichas asimétricas a partir de cualquier origen. Además es sencillo ver que por cada ficha simétrica de longitud k pueden obtenerse exactamente $n + 1$ nuevas fichas simétricas. Así lo que hemos visto es que:

$$s_{k+2}(n) = (n + 1)s_k(n)$$

El modo de obtener fichas asimétricas es algo más complicado y es, además, diferente según si la ficha original sea simétrico o no. Si la ficha original es asimétrica podemos completarla con cualquier número por cada uno de sus dos lados y obtendremos siempre fichas asimétricas y distintas. Es decir, obtendremos por este camino $(n + 1)^2 a_k(n)$ nuevas fichas. Si la original es simétrica hemos de tener cuidado con las repeticiones y si contamos con un poco de cuidado veremos que aparecen $\frac{n(n+1)}{2} s_k(n)$ fichas. Hemos probado pues que:

$$a_{k+2}(n) = (n + 1)^2 a_k(n) + \frac{n(n + 1)}{2} s_k(n)$$

y por lo tanto fijando $a_1(n)$, $s_1(n)$, $a_2(n)$ y $s_2(n)$ podemos obtener, por recurrencia, $f_k(n)$ para cualquier valor de k.