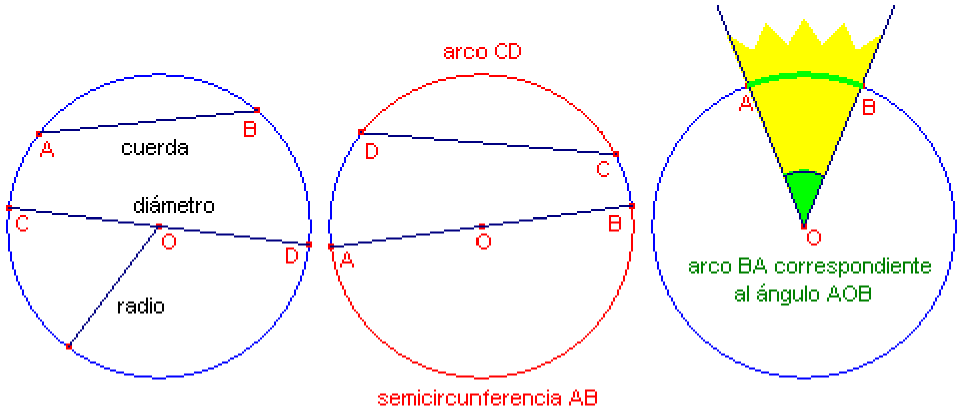
Por D. José L. García Rodrigo
http://www.terra.es/personal/iesblecu/

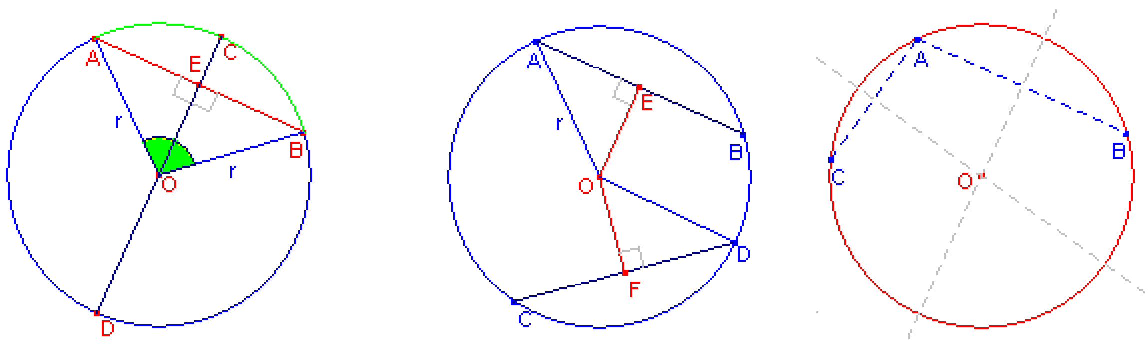
1. La circunferencia.

1.1. Elementos de una circunferencia.

Definición 1. Se llama **circunferencia** al lugar geométrico formado por los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.



- Se llama **cuerda** al segmento que une dos puntos cualquiera de la circunferencia.
- Se llama **diámetro** a la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- Se llama **radio** al segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- Se llama **arco** a cada una de las partes en las que una cuerda divide a la circunferencia.
- Se llama **semicircunferencia** a cada una de las partes en las que un diámetro divide a la circunferencia.
- Se llama **ángulo central** al ángulo cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia.



Teorema 1. La recta diametral perpendicular a una cuerda es mediatriz de la misma, bisectriz del ángulo central correspondiente, y divide al arco en dos iguales.	Teorema 2. Dos cuerdas iguales, equidistan del centro.	Teorema 3. Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia y sólo una.

1.2. Posiciones relativas

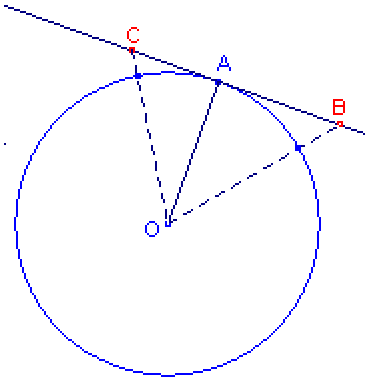
Definición 2. Sea C una circunferencia de centro O y radio r. Sea P un punto del plano

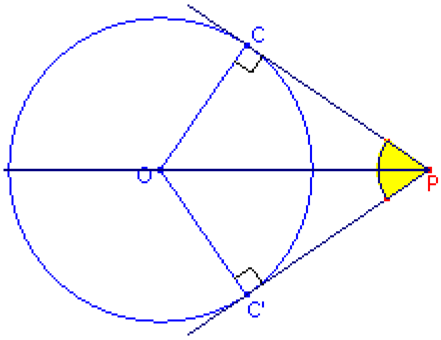
Diremos que:

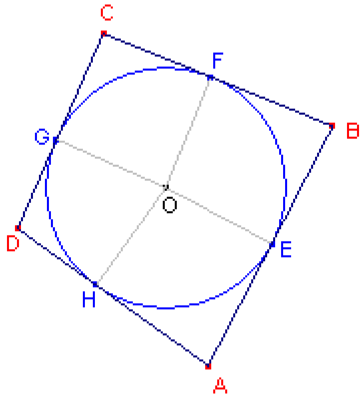
- P es exterior a la circunferencia si d(P,O) > r
- P está en la circunferencia si d(P,O) = r
- P es interior a la circunferencia si d(P,O) < r

Definición 3. Diremos que una recta es:

- secante a una circunferencia si se cortan en dos puntos.
- tangente a una circunferencia si se cortan en un punto.
- exterior a una circunferencia si no se cortan.







Teorema 4. El radio de contacto es perpendicular a la tangente.

Teorema 5. Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes, los segmentos comprendidos entre dicho punto y los de contacto son iguales. La semirrecta que contiene al segmento punto-centro es bisectriz del ángulo que forman las dos tangentes.

Teorema 6. En todo cuadrilátero circunscriptible las sumas de los lados opuestos son iguales

Definición 4. Sean:

C una circunferencia de centro O y radio R.

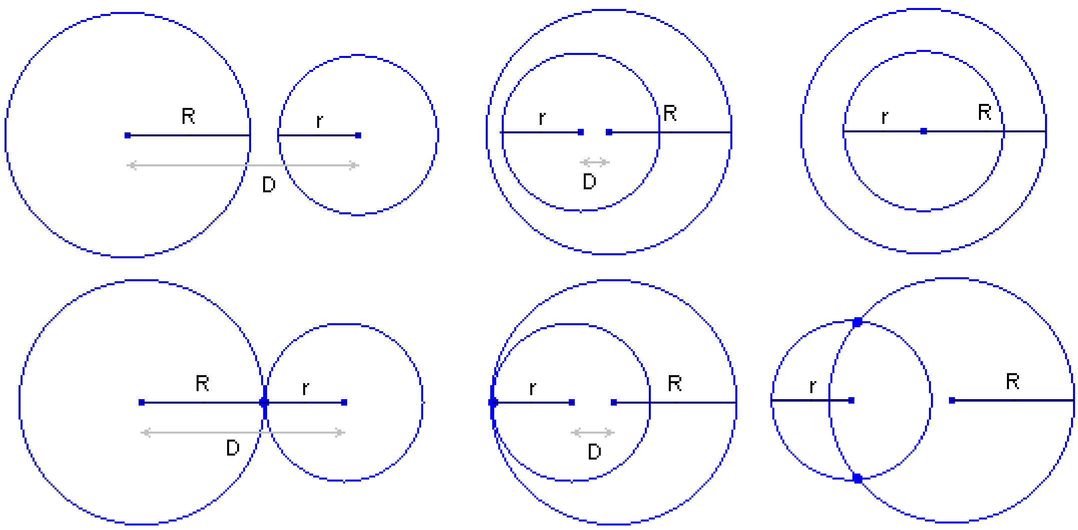
C ' una circunferencia de centro O' y radio r.

D la distancia entre los centros O y O'

Diremos que las circunferencias son:

- Exteriores, si no tienen ningún punto en común y D > R + r.
- Interiores, si no tienen ningún punto en común y D < R - r.
- Tangentes Exteriores, si tienen un punto en común y D = R + r.
- Tangentes Interiores, si tienen un punto en común y D = R - r.
- Secantes si tienen dos puntos en común.

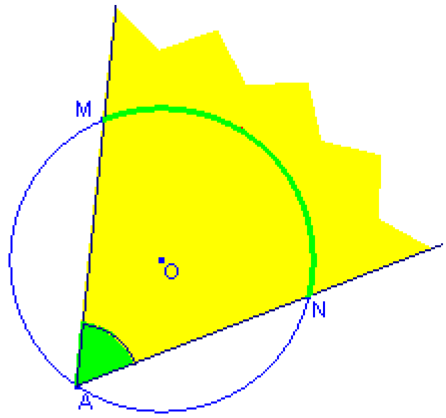
Dos circunferencias interiores que tienen el mismo centro se llaman Concéntricas.



2. Ángulos en la Circunferencia.

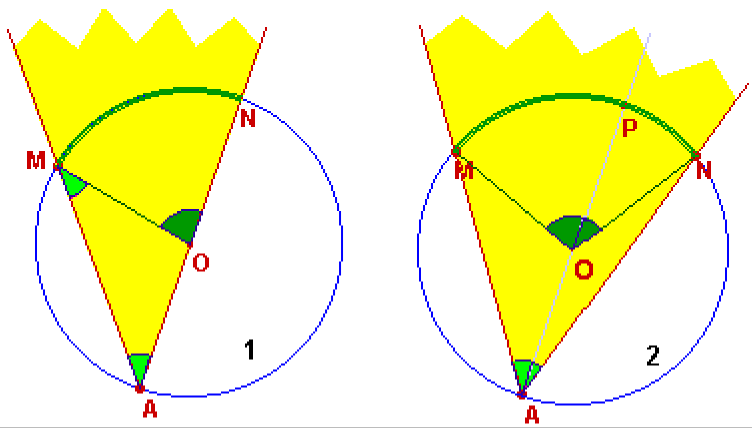
2.1. Ángulos.

Definición 5. Llamaremos ángulo inscrito en una circunferencia a todo aquél cuyo vértice está en ella y los lados son secantes.
La intersección del ángulo con la circunferencia nos da además del vértice, un arco que diremos está comprendido o abarcado por dicho ángulo.



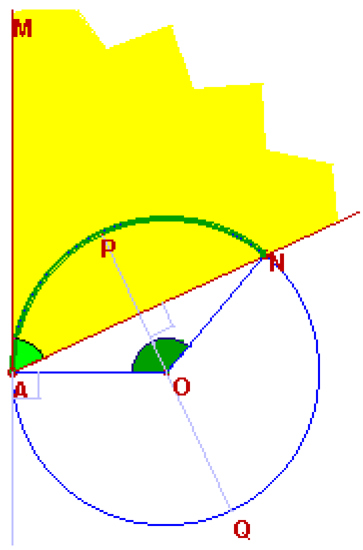
Teorema 7. Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del central que comprende el mismo arco.

Dem**:**



Caso 1º	Caso 2º	Caso 3º
$\overline{OM}=\overline{OA}\Rightarrow \overset{\Delta}{OMA}$ isósceles $\Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{M}=\hat{A}$ $\hat{O}=180º\text{-}M\hat{O}A=\hat{M}+\hat{A}$ $\left.\begin{array}{r}\hat{M}=\hat{A}\\ \hat{O}=\hat{M}+\hat{A}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}=2\hat{A}\Rightarrow \hat{\mathbf{A}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{O}}$	$\hat{A}=M\hat{A}P+P\hat{A}N=$ $=\frac{1}{2}M\hat{O}P+\frac{1}{2}P\hat{O}N=$ $=\frac{1}{2}\left(M\hat{O}P+P\hat{O}N\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{O}}$	$\hat{A}=M\hat{A}P-P\hat{A}N=$ $=\frac{1}{2}M\hat{O}P-\frac{1}{2}P\hat{O}N=$ $=\frac{1}{2}\left(M\hat{O}P-P\hat{O}N\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{O}}$

Definición 6. Llamaremos ángulo semiinscrito en una circunferencia a todo aquél cuyo vértice está en ella y cuyos lados son uno tangente y otro secante.
La intersección del ángulo con la circunferencia nos da un arco que diremos está comprendido o abarcado por dicho ángulo.

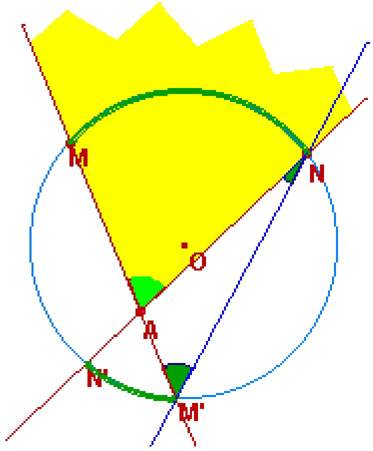


Teorema 8. Todo ángulo semiinscrito en una circunferencia es igual a la mitad del central que abarca el mismo arco.

Dem:

$$\left.\begin{array}{r}\text{semirrecta } MA\perp\overline{AO}\\ \overline{AN}\perp\overline{OP}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=A\hat{O}P=\frac{1}{2}\hat{O}$$

Definición 7. Llamaremos ángulo interior de una circunferencia a todo aquél cuyo vértice es un punto interior de la misma.

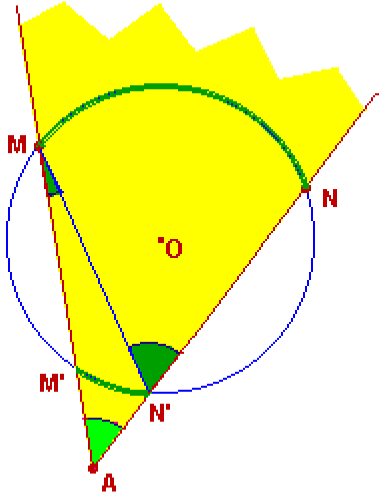


Teorema 9. Todo ángulo interior es igual a la semisuma de los centrales correspondientes a los arcos abarcados por dicho ángulo y por su opuesto por el vértice.

Dem:

$$\hat{A} = \hat{N} + \hat{M}' = \frac{1}{2} N'\hat{O}M' + \frac{1}{2} N\hat{O}M = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{N'\hat{O}M' + N\hat{O}M}\right)$$

Definición 8. Llamaremos ángulo exterior de una circunferencia a todo aquél cuyo vértice es un punto exterior de la.



Teorema 10. Todo ángulo exterior cuyos lados cortan o son tangentes a la circunferencia es igual a la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los arcos abarcados por sus lados.

Dem:

$$\hat{N}' = \hat{A} + \hat{M} \Rightarrow \hat{A} = \hat{N}' - \hat{M} = \frac{1}{2} N\hat{O}M - \frac{1}{2} M'\hat{O}N' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{N\hat{O}M - M'\hat{O}N'}\right)$$

Ejercicio 1. Un cuadrilátero se dice inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están sobre ella. ¿Qué propiedad deben cumplir los ángulos de un cuadrilátero para que sea inscriptible?

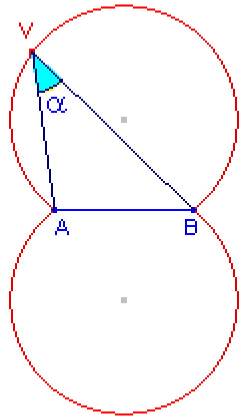
Ejercicio 2. Si dos circunferencias se cortan en los puntos A y B, y por estos puntos se traza una secante a las dos, las rectas que unen sus extremos en cada circunferencia son paralelas.

Ejercicio 3. Por el punto de tangencia de dos circunferencias se traza una secante común.
Demostrar:
1. Que los radios trazados en los extremos de la secante son paralelos.
2. Que las tangentes trazadas en esos mismos extremos serán también paralelas.
3. Que los arcos tienen igual valor.

Ejercicio 4. Se llama ángulo exinscrito al ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia, un lado es secante y el otro exterior a la circunferencia. Demostrar que su medida es la semisuma de los ángulos centrales correspondientes a los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y entre los lados del opuesto por el vértice.

Ejercicio 5. Dada la circunferencia de centro O, desde el punto A se traza la secante ABC, de modo que sea AB = R, y se traza AOD que pasa por el centro. Demostrar que $C\hat{O}D = 3\hat{A}$.

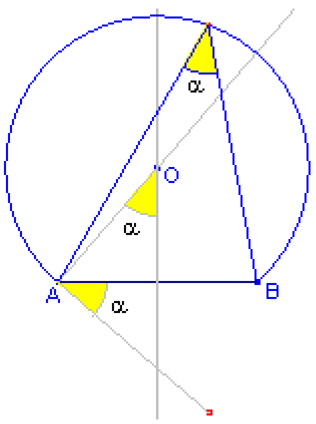
2.2 Arco capaz.



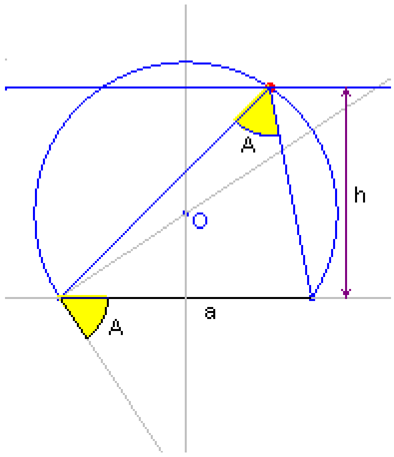
Sea un segmento AB y un ángulo α.

Definición. Llamaremos arco capaz del ángulo α sobre el segmento AB al lugar geométrico formado por los vértices de los ángulos iguales a α y cuyos lados pasan por los puntos A y B.

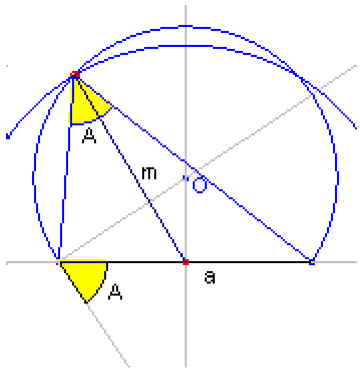
En realidad son dos arcos de circunferencia simétricos respecto del segmento AB. Desde cualquiera de esos puntos se "ve" el segmento AB bajo un mismo ángulo α.



Ejercicio 6. Construir el arco capaz de un ángulo α sobre un segmento AB.



Ejercicio 7. Construir un triángulo dados a, h_a y A.



Ejercicio 8. Construir un triángulo dados a, m_a y A.

Problema 9. Desde un navío X se divisan tres puntos notables de la costa A, B y C, y se miden los ángulos AXB y BXC que forman entre sí las visuales. Con estos sencillos datos fijar el punto X en el mapa.

Problema 10. (Olimpiada Matemática en Zaragoza Curso 90/91)
Una sala de espectáculos tiene una pantalla de 5 m. de ancho.

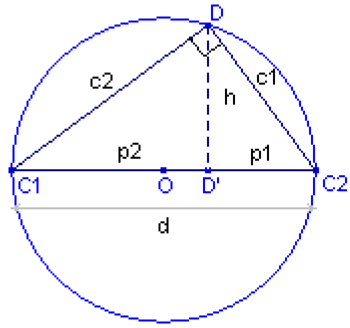
a) Dibujar una zona en la que los espectadores vean la pantalla bajo un ángulo comprendido entre 45º y 90º; después otra zona desde la que se vea la pantalla bajo un ángulo comprendido entre 30º y 45º.

b) ¿Cuáles son las dimensiones mínimas de la sala para que contenga las dos zonas anteriores?

3.Relaciones métricas en la Circunferencia.

3.1. Un diámetro y un punto de una circunferencia.

Teorema 11. Toda cuerda que tenga uno de sus extremos en un diámetro, es media proporcional entre éste y la proyección de la cuerda sobre él.



Dem: El arco correspondiente al ángulo D es una semicircunferencia, luego el ángulo D es recto y el triángulo C_1C_2D es rectángulo. Los triángulos $DD'C_2$, $C_1D'D$ y C_1DC_2 son semejantes por tanto:

$$DD'C_2 \approx C_1DC_2 \Rightarrow \frac{c_1}{p_1} = \frac{d}{c_1} \Rightarrow \mathbf{c_1^2 = d \cdot p_1}$$

$$C_1D'D \approx C_1DC_2 \Rightarrow \frac{c_2}{p_2} = \frac{d}{c_2} \Rightarrow \mathbf{c_2^2 = d \cdot p_2}$$

Teorema 12. La suma de los cuadrados de dos cuerdas que tienen uno de sus extremos en los de un diámetro, y el otro en un mismo punto de la circunferencia, es igual al cuadrado del diámetro.

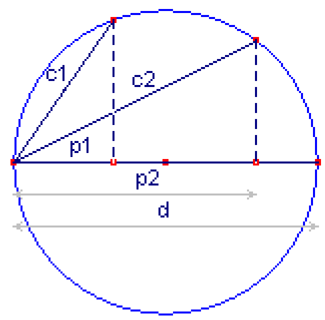
Dem: $c_1^2 + c_2^2 = d \,.\, p_1 + d \,.\, p_2 = d(p_1 + p_2) = d^2$

Teorema 13. Toda semicuerda perpendicular a un diámetro es media proporcional entre los segmentos en que lo divide .

Dem: Los triángulos $DD'C_2$ y $C_1D'D$ son semejantes por tanto:

$$DD'C_2 \approx C_1D'D \Rightarrow \frac{h}{p_1} = \frac{p_2}{h} \Rightarrow \mathbf{h^2 = p_1 \cdot p_2}$$

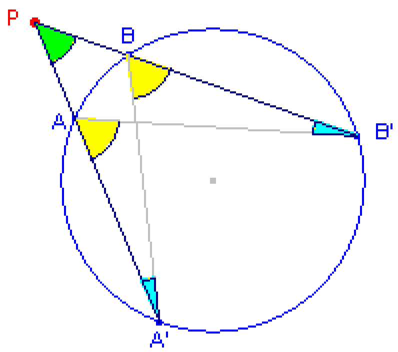
Teorema 14. Los cuadrados de dos cuerdas c_1 y c_2 trazadas por un mismo extremo de un diámetro, son proporcionales a sus respectivas proyecciones p_1 y p_2 sobre el diámetro.

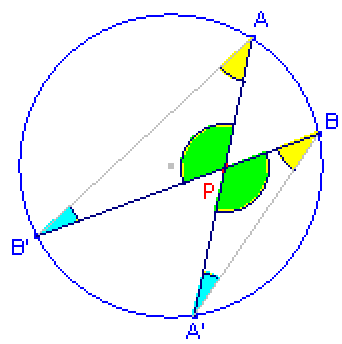


Dem: Por teorema anterior $\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{d \cdot p_1}{d \cdot p_2} = \frac{p_1}{p_2}$

3.2. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Teorema 15. Si desde un punto del plano de una circunferencia se trazan secantes a la misma, el producto de distancias de dicho punto a los de intersección de cada secante es una constante.





Dem:

Si el punto no pertenece a la circunferencia:
Los triángulos PAB' y PBA' son semejantes por tener los ángulos iguales, por tanto:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}}\Rightarrow \mathbf{\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}}$$

Si el punto pertenece a la circunferencia: $\mathbf{\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=0=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}}$

Definición 10. Sean una circunferencia C y un punto P, y sea una recta r que pasa por P y corta a C en dos puntos A yA'. Llamaremos potencia de P respecto de la circunferencia C a:

$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}$, si P es exterior a C

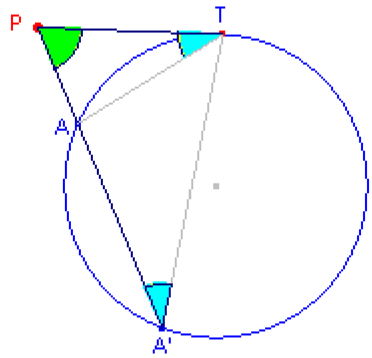
$-\overline{PA}\cdot\overline{PA'}$, si P es interior a C

0 , si P pertenece a C

La definición responde a la consideración de segmentos orientados. El producto de distancias será positivo si P no separa los puntos A y A' y negativo cuando los separa.

Teorema 16. Dos pares de puntos AA' y BB' situados en dos rectas secantes en P verifican la igualdad $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}$, si y sólo si los cuatro puntos son concíclicos, es decir, pertenecen a una circunferencia.

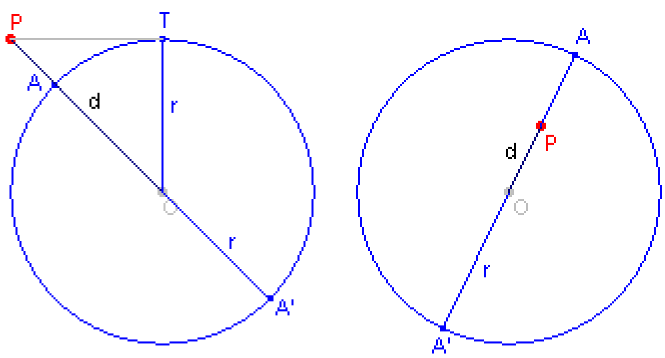
Teorema 17. Si P es un punto exterior a una circunferencia, la potencia es también el cuadrado del segmento PT, donde T es el punto de contacto de una tangente a la circunferencia trazada desde P.



Dem: Los triángulos PTA y PA'T son semejantes, luego

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}}=\frac{\overline{PT}}{\overline{PA'}}\Rightarrow \overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\mathbf{\overline{PT}^2}$$

Teorema 18. La potencia de un punto respecto de una circunferencia es igual al cuadrado de la distancia punto-centro menos el cuadrado del radio.

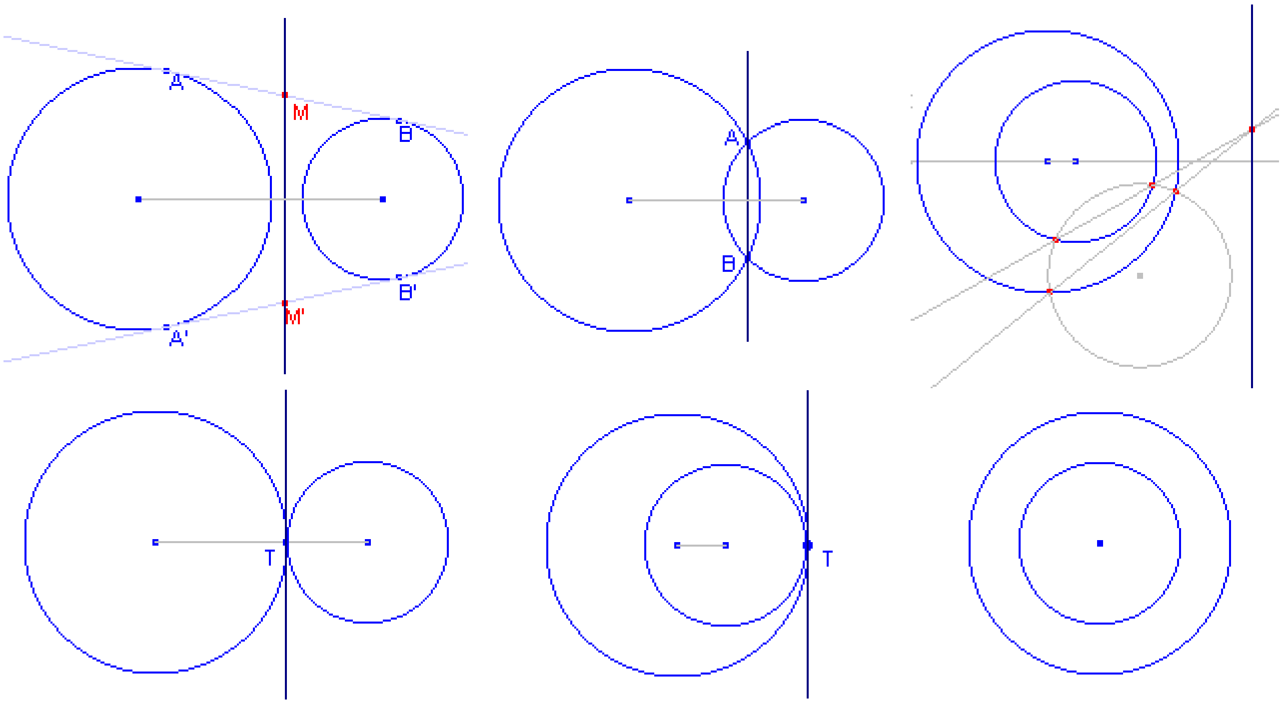


Dem:

P exterior $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=(d-r)(d+r)=d^2-r^2$

P interior $-\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=-(r-d)(r+d)=$
$=d^2-r^2$

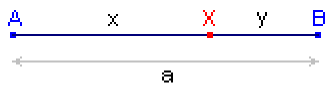
Teorema 19. El lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias es una recta perpendicular a la que une los centros. Se llama "eje radical" de las dos circunferencias.



Teorema 20. Si los centros de tres circunferencias no están alineados, los ejes radicales de las mismas tomadas dos a dos, se cortan en un punto, único del plano que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias y se llama "centro radical" de las mismas.

Ejercicio 11. ABCD es un trapecio rectángulo. Se trazan dos circunferencias que tienen a los lados AB y CD como diámetros. Estas circunferencias se cortan en los puntos P y Q. La recta que pasa por P y Q corta al lado BC en M. Probar que M es el punto medio de BC.

Ejercicio 12. Se dice que un punto X divide a un segmento AB en media y extrema razón cuando se verifica $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$. La parte mayor x recibe el nombre de segmento áureo del segmento total AB.



Aplicar la noción de potencia para construir un segmento del que se conoce su segmento áureo.

Ejercicio 13. Dividimos un segmento a en dos partes x e y. Si la parte mayor x es segmento áureo de a, entonces la parte menor y es segmento áureo de x.

(Efectivamente: $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{a-x}{x-y}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{y}{x-y}$).

Hallar el segmento áureo de un segmento dado AB.

BIBLIOGRAFÍA:

- Curso de Geometría Métrica. Tomo I.
  Autor: Pedro Puig Adam. Editorial: Biblioteca Matemática. Madrid 1973.
- Circulando por el Círculo.
  Autores: Fco. Padilla Díaz y otros. Editorial Síntesis. S.A. Madrid 1991.
- Introducción a la Geometría.
  Autor: Eugenio Roanes Macías. Ediciones Anaya. S. A. Madrid 1980.
- Ángulos en la Circunferencia. Prof. José Martínez Hernández.
  Dto Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Cartagena
  http://www.dmae.upct.es/~pepemar/home